

Стресс-тестирование в факторных моделях фондового рынка

А.А. Новоселов, КГТЭИ, СФУ
arcady@novosyolov.ru

Факторная модель

▶ Основное уравнение $Y = LX + Z$

▶ Ковариационная структура:

$$C = \mathbf{E}(XX') = \Lambda R \Lambda; \quad D = \mathbf{E}(ZZ')$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \rho_{m3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристики портфеля

- ▶ Портфель $P = w'Y$
- ▶ Дисперсия портфеля $\mathbf{E}(PP') = w'LC L'w + w'Dw$
- ▶ VaR портфеля $f_\alpha(P) = q_\alpha \sqrt{w'LC L'w + w'Dw}$

Стресс 1: рост волатильности

- ▶ Коэффициент роста $\mu > 1$
- ▶ Возмущенные матрицы волатильностей:
- ▶ $\Lambda_{\mu}^* = \mu\Lambda, D_{\mu}^* = \mu D$
- ▶ Возмущенная матрица ковариаций $C_{\mu}^* = \Lambda_{\mu}^* R \Lambda_{\mu}^* = \mu^2 C$
- ▶ Возмущение VaR: $f_{\alpha}^*(P) = \mu f_{\alpha}(P)$

Экспериментальное наблюдение: рост волатильности на рынке на 20-40% может сопровождаться ростом VaR в разы

Коэффициент корреляции смеси?

► Смесь

$$\mathbf{E}_{\lambda F + (1-\lambda)G}(U_1^k U_2^l) = \lambda \mathbf{E}_F(U_1^k U_2^l) + (1 - \lambda) \mathbf{E}_G(U_1^k U_2^l)$$

► Корреляция

$$\rho(U_1, U_2) = \frac{\mathbf{E}(U_1 U_2) - \mathbf{E}U_1 \mathbf{E}U_2}{\sigma_{U_1} \sigma_{U_2}}$$

Стресс 2: рост корреляций

- ▶ Множество номеров факторов $N = \{1, \dots, m\}$
- ▶ Группа связанных факторов $M \subseteq N$
- ▶ Экстремальная корреляционная матрица

$$K^M = (k_{ij}^M), \quad i, j \in N$$

$$k_{ij}^M = \begin{cases} 1, & (i, j \in M) \vee (i, j \in M^c), \\ -1, & (i \in M, j \in M^c) \vee (i \in M^c, j \in M). \end{cases}$$

Пример экстремальной корреляционной матрицы

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$M = \{1, 2\}$$

$$K^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Комбинированное возмущение

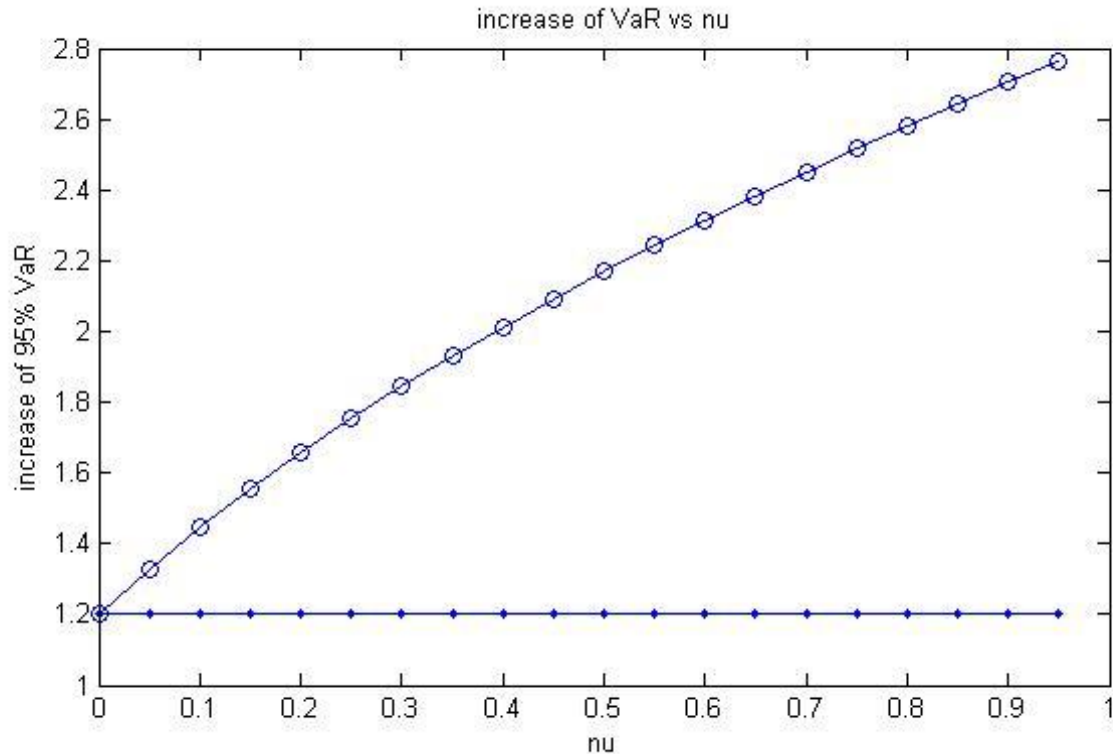
- ▶ Рост корреляций

$$R^*(M, \nu) = \nu K^M + (1 - \nu)R$$

- ▶ Плюс рост волатильности

$$C^{**}(\mu, \nu, M) = \Lambda_\mu^* R^*(M, \nu) \Lambda_\mu^*$$

Иллюстрация



Изменение показателя 95% VaR при использовании возмущения волатильности с параметром $\mu=1.2$ (точки) и комбинированного возмущения с параметрами $\mu=1.2$, $\nu=0,0.05,\dots,0.95$ (окружности)