СТРЕСС-ТЕСТИРОВАНИЕ В ФАКТОРНЫХ МОДЕЛЯХ РЫНОЧНОГО РИСКА

А.А. Новоселов
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
E-mail: arcady@novosyolov.ru

В практике управления рыночным риском часто используются [1,2] факторные модели рыночных активов вида

$$Y = LX + Z, \tag{1}$$

где случайный вектор X размерности m представляет доходность факторов модели, случайный вектор Y размерности n описывает доходность рыночных активов, а матрица L размера $n \times m$ содержит коэффициенты линейной регрессии Y на X. Случайный вектор Z описывает невязки уравнений регрессии. Содержательно первое слагаемое в правой части (1) представляет изменчивость доходности активов, вызываемую изменениями значений факторов, а второе слагаемое – изменчивость доходности активов, специфическую для каждого актива. Обычно в модели предполагается, что X имеет многомерное нормальное распределение с нулевыми средними и ковариационной матрицей $C = \mathbf{E}(XX')$ размера $m \times m$, а Z состоит из независимых нормальных переменных с нулевыми средними и заданными стандартными отклонениями, то есть, имеет диагональную ковариационную матрицу $\mathbf{E}(ZZ') = D$. Предполагается также, что векторы X, Z независимы. Отметим, что ковариационная матрица доходности активов при этом имеет вид

$$A = \mathbf{E}(YY') = \mathbf{E}(LX + Z)(X'L' + Z') = LCL' + D. \tag{2}$$

Кроме того, ковариационную матрицу C можно представить в виде

$$C = \Lambda R \Lambda, \tag{3}$$

где R - корреляционная матрица, а Λ представляет собой диагональную матрицу, на диагонали которой стоят стандартные отклонения компонент вектора X.

В условиях нормального функционирования ковариационная матрица C и параметры вектора Z могут быть достаточно хорошо оценены по рыночным данным. Однако, в периоды повышенной волатильности и кризисов, параметры моделей существенно изменяются за относительно небольшие промежутки времени. Для того чтобы иметь представление о возможном поведении портфелей активов в кризисные периоды, проводится стресс-тестирование [2-4].

Часто при этом ограничиваются увеличением значений волатильности факторов X и «помех» Z. Такое стресс-тестирование сводится к увеличению диагональных элементов матриц Λ и D, что всегда возможно, и не вызывает технических затруднений. Действительно, для произвольного числа $\mu > 1$ возмущенная матрица стандартных отклонений может быть выбрана, например, в виде

$$\Lambda^*_\mu = \mu \Lambda \tag{4}$$

При этом стресс-тестирование сводится к использованию в модели возмущенной матрицы ковариаций

$$C^*(\mu) = \Lambda^*_\mu R \Lambda^*_\mu = \mu^2 C \tag{5}$$

вместо (3). Матрица $C^*(\mu)$, очевидно, сохраняет свойства симметрии и положительной определенности матрицы C.

Однако опыт показывает [3], что в периоды повышенной волатильности рынка изменяются также и корреляции, которые, как правило, существенно возрастают. Попытки непосредственного изменения корреляционной матрицы R в (3) сталкиваются с трудностью обеспечения положительной определенности этой матрицы при возмущении ее элементов. В настоящей работе предлагается семейство возмущений корреляционной матрицы, при котором значения корреляций возрастают, причем обеспечивается выполнение свойства положительной определенности корреляционной матрицы.

Описываемое семейство возмущений имеет следующий вид. Обозначим K матрицу размера $m \times m$, состоящую из 1. Для подмножества $M \subseteq N = \{1, \ldots, m\}$ обозначим $M^c = N \setminus M$ и пусть K^M - матрица, элементы которой k^M_{ij} задаются равенствами

$$k^M_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j \in M) \vee (i, j \in M^c), \\ -1, & (i \in M, j \in M^c) \vee (i \in M^c, j \in M). \end{cases} \tag{6}$$

В частности, $K = K^N$. Матрица K^M является корреляционной матрицей системы идеально (положительно или отрицательно) коррелированных случайных величин.

Возмущение корреляционной матрицы R задается двумя параметрами: подмножеством M и числом $\nu \in [0, 1]$, и имеет вид

$$R^*(M, \nu) = (1 - \nu) R + \nu K^M. \tag{7}$$

Возмущенная ковариационная матрица имеет вид

$$C^{**}(\mu, \nu, M) = \Lambda^*_\mu R^*(M, \nu) \Lambda^*_\mu, \tag{8}$$

где Λ^*_μ и $R(M, \nu)$ заданы в (4) и (7), соответственно.

Теорема. Пусть ковариационная матрица C исходной факторной модели (1) является положительно определенной. Тогда возмущенная матрица $C^{**}(\mu, \nu, M)$ является симметричной и положительно определенной при произвольных значениях параметров $M \subseteq N$, $\mu > 0$ и $\nu \in [0, 1)$. При $\nu = 1$ матрица $C^{**}(\mu, \nu, M)$ вырождается и является лишь неотрицательно определенной.

Для иллюстрации предлагаемого метода стресс-тестирования опишем его применение к анализу поведения показателя VaR_α [5] рыночного портфеля активов, где $\alpha \in (0, 1)$ параметр. Для простоты будем полагать, что матрица L - единичная, то есть, портфель составляется из факторов, и $D = 0$. Обозначим $w = (w_1, \ldots, w_n)'$ веса активов в портфеле, так что доходность портфеля представляется в виде $w'Y$. Обозначим P_w, P^*_w, P^{**}_w доходности портфелей, вычисленные, соответственно, при использовании исходной матрицы ковариаций C, простой возмущенной ковариационной матрицы

$C^*(\mu)$, и сложной возмущенной ковариационной матрицы $C^{**}(\mu, \nu, M)$. При этом дисперсия доходности портфеля вычисляется по, соответственно, по формулам

$$\mathbf{D}P_w = w'Aw = w'\Lambda R\Lambda w, \quad \mathbf{D}P_w^*(\mu) = \mu^2 \cdot \mathbf{D}P_w,$$
$$\mathbf{D}P_w^{**} = w'A^*w = \mu^2 w'\Lambda R^*(M, \nu)\Lambda w.$$

Показатель VaR исходного и возмущенных портфелей вычисляются по формулам

$$q_\alpha(w) = q_\alpha^0 \sqrt{w'Aw}, \quad q_\alpha^*(w) = \mu q_\alpha(w), \quad q_\alpha^{**}(w) = q_\alpha^0 \sqrt{w'A^*w}, \tag{9}$$

где q_α^0 обозначает квантиль уровня α стандартного нормального распределения. На рис. 1 приведены графики отношений $q_\alpha^*(w)/q_\alpha(w)$ и $q_\alpha^{**}(w)/q_\alpha(w)$ от параметра ν. Видно, что даже при небольшом увеличении стандартных отклонений изменение корреляций может существенно изменять значение VaR.

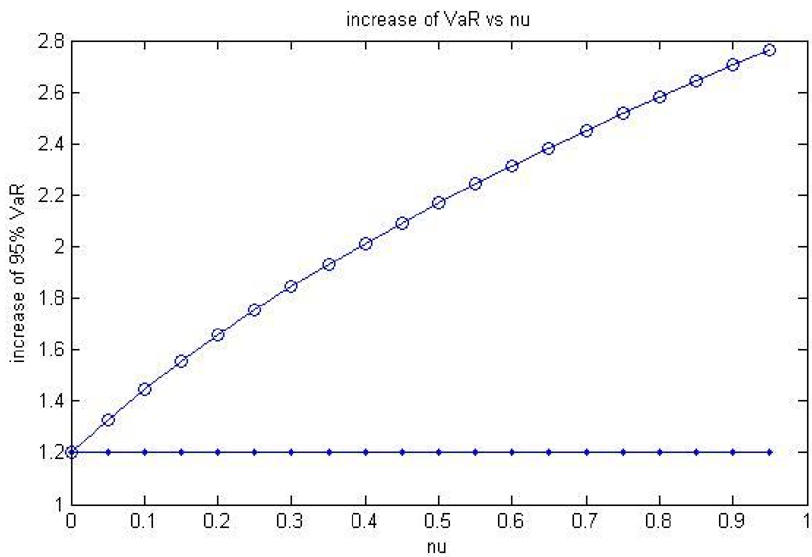

Рис. 1. Изменение показателя 95% VaR при использовании простого возмущения (5) с параметром $\mu = 1.2$ (точки) и возмущения (8) с параметрами $\mu = 1.2, \nu = 0, \ldots, 0.95$, $M = N = \{1 \ldots, 77\}$ (окружности)

Литература

1. B.G.Briner, G.Connor. How much structure is best? A comparison of market model, factor model and unstructured equity covariance matrices. The journal of risk, 10 (2008), 4, 3-30.
2. Kupiec, Paul, 1998, Stress testing in a value at risk framework, Journal of Derivatives 6.
3. M. Sorge. Stress-testing financial systems: an overview of current methodologies. BIS Working Papers No 165, 2004, 41 p.
4. J.R. Aragonés, C. Blanco, K. Dowd. Incorporating Stress Tests into Market Risk Modeling. FEA working paper, 2001, 6p.
5. G.Holton. Value at risk: theory and practice. Academic Press, 2003, 405 p.