О парадоксе фантомного распределения

А.А. Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036
e-mail: anov@ksc.krasn.ru, тел. (3912) 495382

Аннотация

Рассматривается один парадокс теории случайных множеств и предлагаются способы его разрешения в рамках классической теории вероятностей. Отмечается громоздкость получаемых классических моделей и формулируется проблема расширения теории вероятностей в направлении допущения использования знакопеременных вероятностных мер.

1. Введение

При изучении сложных объектов часто приходится сталкиваться со следующей проблемой. Обычно объект недоступен для наблюдения, как единое целое, и можно наблюдать лишь поведение его отдельных частей. На основании частичных моделей объекта, построенных по наблюдениям за поведением частей, необходимо составить представление о поведении объекта в целом, другими словами, построить модель этого объекта. При синтезе единой модели из частичных моделей может оказаться, что в выбранном классе моделей не найдется ни одной модели, согласованной с наблюдаемым поведением частей.

Иллюстрацией этого явления является и парадокс, рассмотренный в работе [1]. Здесь в качестве модели объекта выбрано вероятностное распределение случайного множества, а для наблюдения доступны только распределения некоторых его случайных подмножеств (маргинальные распределения). Там же приводится пример наблюдаемых маргинальных распределений, которым не соответствует ни одно вероятностное распределение исходного случайного множества.

В настоящей работе предлагаются расширения исходной модели примера, позволяющие разрешить парадокс, и проводится сравнение описанных подходов к проблеме синтеза. В частности, отстаивается тезис о полезности расширения вероятностных моделей посредством допущения отрицательных значений вероятностной меры.

Приведем постановку задачи в терминах распределения случайного множества. Пусть $\mathcal{X}$ – конечное множество, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $K : \Omega \to 2^{\mathcal{X}}$ – случайное множество под $\mathcal{X}$ [2]. Для подмножества $A \subseteq \mathcal{X}$ можно определить случайное подмножество K_A, как сужение K на A:

$$\mathbf{P}(K_A = B) = \mathbf{P}(K \cap A = B), \;\; B \subseteq A.$$

В [1] рассматривался следующий парадокс: пусть $|\mathcal{X}| = 3$, например, $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ и пусть случайные подмножества $K_{\{x,y\}}$, $K_{\{y,z\}}$, $K_{\{z,x\}}$ имеют следующие распределения:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(K_{\{x,y\}} = \emptyset) = 0, \;\; \mathbf{P}(K_{\{x,y\}} = \{x\}) = 1/2, \\ \mathbf{P}(K_{\{x,y\}} = \{y\}) = 1/2, \;\; \mathbf{P}(K_{\{x,y\}} = \{x, y\}) = 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(K_{\{y,z\}} = \emptyset) = 0, \;\; \mathbf{P}(K_{\{y,z\}} = \{y\}) = 1/2, \\ \mathbf{P}(K_{\{y,z\}} = \{z\}) = 1/2, \;\; \mathbf{P}(K_{\{y,z\}} = \{y, z\}) = 0,\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(K_{\{z,x\}} = \emptyset) = 0, \;\; \mathbf{P}(K_{\{z,x\}} = \{z\}) = 1/2, \\ \mathbf{P}(K_{\{z,x\}} = \{x\}) = 1/2, \;\; \mathbf{P}(K_{\{z,x\}} = \{z, x\}) = 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Эти распределения можно наглядно представить в табличной форме:

x	y	Вероятность
○	○	0
○	●	1/2
●	○	1/2
●	●	0

y	z	Вероятность
○	○	0
○	●	1/2
●	○	1/2
●	●	0

z	x	Вероятность
○	○	0
○	●	1/2
●	○	1/2
●	●	0

Проблема заключается в нахождении случайного множества K под $\mathcal{X}$, обладающего такими случайными подмножествами. Один из способов формального решения этой задачи, в котором приходится использовать отрицательные вероятности, приведен в [1]. Там же дано содержательное толкование приведенного решения, которое за счет "раздвоения" объектов позволяет представить себе модель, в которой наблюдаемая картина может реализоваться в обычном вероятностном смысле.

В настоящей работе предлагаются два способа формализации указанного раздвоения объектов. Первый способ состоит в расширении понятия состояния, и описан в параграфе 3.1, а второй способ заключается в использовании расширенного понятия множества, предложенного в [2]; он представлен в параграфе 3.2. Для полноты изложения в параграфе 2 предварительно изложен собственно парадокс из работы [1]. В параграфе 4 показывается, что описанный парадокс присущ не только распределениям случайных множеств, но и другим вероятностным моделям.

В заключении формулируется тезис о предпочтительности использования вероятностных моделей с отрицательными значениями вероятностей, по крайней мере, в качестве математического аппарата, и выдвигается задача развития соответствующей теории.

2. Парадокс фантомного распределения

2.1. Система уравнений

Для $A \subseteq \mathcal{X}$ обозначим $p_A = \mathbf{P}(K = A)$, и для упрощения обозначений будем опускать фигурные скобки и запятые в задании множества перечислением его элементов в нижнем индексе, например, будем писать p_{xy} вместо $p_{\{x,y\}}$, и просто p вместо $p_\emptyset$. В принятых обозначениях высказывание "K_{xy}, K_{yz}, K_{zx} являются случайными подмножествами случайного множества K с распределениями (1.1) – (1.3)" формально описывается следующей системой из 12 уравнений, разбитых для удобства на три группы, соответствующие случайным подмножествам:

$$\begin{cases} p + p_z & = & 0 \\ p_x + p_{xz} & = & 1/2 \\ p_y + p_{yz} & = & 1/2 \\ p_{xy} + p_{xyz} & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p + p_x & = & 0 \\ p_y + p_{xy} & = & 1/2 \\ p_z + p_{xz} & = & 1/2 \\ p_{yz} + p_{xyz} & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p + p_y & = & 0 \\ p_x + p_{xy} & = & 1/2 \\ p_z + p_{yz} & = & 1/2 \\ p_{xz} + p_{xyz} & = & 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Складывая все уравнения любой из групп, получаем соотношение

$$\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} \mathbf{P}(K = A) = 1,$$

так что любое решение системы уравнений (2.1) обладает этим свойством вероятности. Однако, как отмечалось в [1], приведенная система уравнений не имеет неотрицательных решений. В этом нетрудно убедиться непосредственно. Размерность множества решений оказывается равной 1, поэтому, выбрав в качестве свободного параметра вероятность $p = \mathbf{P}(K = \emptyset)$, можно выразить остальные вероятности через p:

$$\begin{gathered} p_x = -p, \qquad p_y = -p, \qquad p_z = -p, \\ p_{xy} = p + 1/2, \qquad p_{yz} = p + 1/2, \qquad p_{zx} = p + 1/2, \\ p_{xyz} = -(p + 1/2). \end{gathered} \tag{2.2}$$

2.2. Содержательная трактовка парадокса

Одно из решений системы уравнений (2.1) получается из (2.2) при $p = 0$, и приведено в таблице 2.1.

x	y	z	Вероятность
○	○	○	0
●	○	○	0
○	●	○	0
○	○	●	0
●	●	○	1/2
●	○	●	1/2
○	●	●	1/2
●	●	●	-1/2

Таблица 2.1: Фантомное распределение

В [1] описаны две содержательных трактовки такого "вероятностного распределения", которые условно назовем "люди на стульях" и "фонарики". Обе трактовки по существу, основаны на "раздвоении" наблюдаемых объектов. Разберемся в ситуации на примере трактовки с фонариками.

В углах треугольной комнаты, изображенной на рисунке 2.1, расположены фонарики x, y, z, а вблизи углов расположены три окна X, Y, Z, через каждое из которых

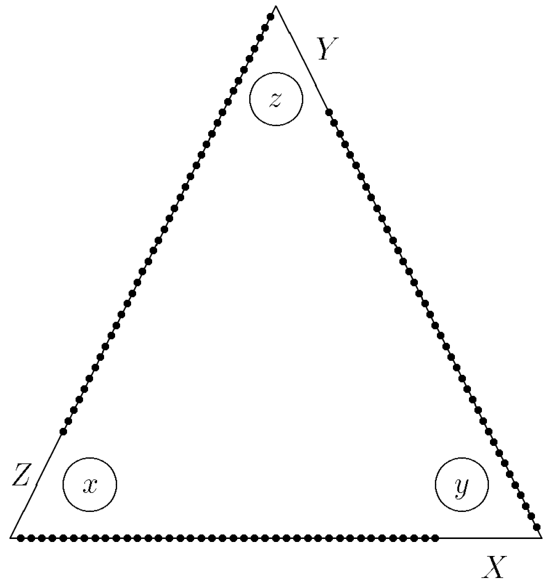

Рис. 2.1: Парадокс с фонариками

наблюдатель может увидеть только пару фонариков, (y, z), (z, x) или (x, y), соответственно, причем первый фонарик каждой пары является ближним к наблюдателю, а второй фонарик - дальним. Распределение на дуплете (1.1) трактуется следующим образом: при взгляде в окно Z наблюдатель с вероятностью $1/2$ видит фонарик x, и с вероятностью $1/2$ – фонарик y, причем увидеть оба фонарика, или не увидеть ни одного наблюдателю не удается. Распределения на дуплетах (1.2), (1.3) трактуются симметрично. В [1] происходящее в комнате описывается следующим образом: каждый из фонариков может находиться в одном из двух состояний: светить в ближнее или в дальнее окно. Свет фонарика можно увидеть только из того окна, в которое он в данный момент направлен. Если теперь представить себе, что вся система фонариков может находиться только в одном из двух состояний: либо все направлены в ближние к ним окна, либо все – в дальние, причем каждое из состояний возникает с вероятностью $1/2$, то распределения видимых фонариков в каждом окне имеют в точности вид (1.1) – (1.3).

Данная трактовка парадокса имеет один существенный недостаток. Как мы видели, при заданных распределениях случайных подмножеств (1.1) – (1.3) "фантомное" распределение исходного случайного множества определено неоднозначно. Приведенная трактовка соответствует значению параметра $p = 0$. Выбирая значение $p = -1/2$, получим "распределение", в определенном смысле двойственное к распределению из таблицы 2.1; оно приведено в таблице 2.2. Для этого решения придется поискать другую интерпретацию в рамках модели фонариков. Задавая другие вещественные значения параметра p, можно исчерпать всевозможные фантомные распределения случайного множества K с заданными распределениями случайных подмножеств (1.1) – (1.3), и к каждому из них придется подбирать свою трактовку.

Идея "раздвоения" фонариков наводит на мысль, что такое разделение можно довести до логического конца, и получить вполне традиционную вероятностную модель, описывающую наблюдения без парадоксов. Это развитие модели реализовано в

x	y	z	Вероятность
$\circ$	$\circ$	$\circ$	-1/2
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	1/2
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	1/2
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	1/2
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	0
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	0
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	0
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	0

Таблица 2.2: Двойственное фантомное распределение

следующем параграфе.

3. Решения в рамках традиционной вероятностной модели

В данном параграфе рассмотрим некоторые модификации исходной модели, позволяющие "соблюсти приличия", то есть, приводящие к обычным вероятностным распределениям. Отметим, что с содержательной точки зрения приводимые интерпретации ничем не отличаются от уже описанных интерпретаций в терминах людей или фонариков. Отличие состоит лишь в формальных моделях, которые попадают в сферу традиционной теории вероятностей.

3.1. Расширение пространства состояний

Рассмотрим трактовку с фонариками. Поскольку каждый из фонариков не просто появляется или не появляется на своем месте, а может находиться в одном из двух состояний, естественно расширить модель таким образом, чтобы учесть эту возможность. Пусть основное множество $\mathcal{X}$ состоит из шести элементов $(x_n, x_f, y_n, y_f, z_n, z_f)$, трактуемых следующим образом. Если в эксперименте элемент x_n попал в наблюдаемое множество, то фонарик в углу x светит в ближнее окно Z; если же в наблюдаемое множество попал элемент x_f, то фонарик в углу x светит в дальнее окно Y. Аналогичный смысл имеют события $y_n \in K, \ldots$. Вместо распределения случайного подмножества на дуплете $\{x, y\}$ теперь нужно рассматривать распределение на подмножестве $\{x_n, x_f, y_n, y_f\}$, которое "наблюдается" из окна Z, и приведено в следующей таблице (указаны только комбинации с ненулевыми вероятностями):

x_n	x_f	y_n	y_f	Вероятность
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	1/2
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	1/2

Таблица 3.1: Вероятности маргинального распределения в расширенной модели

Распределения для других пар фонариков устроены симметрично.

Ясно, что при реализации комбинации из первой строчки в окне Z наблюдается только фонарик y, а при реализации комбинации из второй строчки – только фонарик x; аналогичная ситуация складывается в других окнах. На расширенном множестве $\mathcal{X}$ такое поведение фонариков легко формализуется в рамках теории вероятностей распределением случайного множества K под $\mathcal{X}$ с вероятностями

$$\mathbf{P}(K = \{x_n, y_n, z_n\}) = \mathbf{P}(K = \{x_f, y_f, z_f\}) = 1/2,$$

а вероятности остальных значений $A \subseteq \mathcal{X}$ равны 0. Это распределение легитимным образом описывает содержательную интерпретацию из [1]: все фонарики одновременно светят либо в ближние, либо в дальние окна.

Отметим, что такое расширение пространства состояний является явно избыточным; мощность множества значений случайного элемента модели равна 64. Такова плата за стремление втиснуться в рамки стандартной вероятностной модели с неотрицательными мерами.

3.2. Расширение понятия множества

Можно расширить модель и в другом направлении, сохранив трехэлементное основное множество $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, но рассматривая в $\mathcal{X}$ *целые* подмножества [2], которые, в двух словах, можно описать так. Обычное подмножество A в $\mathcal{X}$ можно представить вектором из трех компонент, которые могут принимать значения 0 и 1, причем значение 1 означает, что соответствующий элемент входит в подмножество A; например, подмножество $A = \{x, z\}$ представляется вектором (1,0,1).[1] Целое подмножество предоставляет большую гибкость для вхождения элементов в себя, и описывается целочисленным вектором, компоненты которого могут принимать значения -1, 0 и 1. Удобно пользоваться также аппаратом индикаторных функций; для обычного подмножества $A \subset \mathcal{X}$ индикаторная функция может принимать только значения 0 и 1, например,

$$I_{\{x,z\}}(x) = 1, \quad I_{\{x,z\}}(y) = 0, \quad I_{\{x,z\}}(z) = 1,$$

а целое подмножество описывается индикаторной функцией, могущей принимать одно из трех значений -1, 0, 1.

Совокупность всех целых подмножеств $\mathcal{X}$ естественно обозначать $3^{\mathcal{X}}$; в трехэлементном $\mathcal{X}$ имеется 27 целых подмножеств.

Содержательное описание процесса наблюдения объектов (фонариков, людей на стульях) в данной модели таково: каждый объект может попасть в случайное множество K (с *целыми* значениями) под $\mathcal{X}$ со значением индикаторной функции 1 или -1, либо не попасть в него вообще. Для $u \in \mathcal{X}$, если $I_K(u) = 1$, то объект u виден из ближнего окна, и не виден из дальнего, а если $I_K(u) = -1$, то, наоборот, он виден из дальнего окна, и не виден из ближнего.

Распределение наблюдений значений индикаторных функций для пар объектов (x, y), (y, z), (z, x) имеет в данном случае вид, показанный в таблице 3.2.

---

[1] Строго говоря, для такого описания необходимо зафиксировать на $\mathcal{X}$ некоторый произвольный порядок.

x	y	Вероятность
-1	-1	1/2
-1	0	0
-1	1	0
0	-1	0
0	0	0
0	1	0
1	-1	0
1	0	0
1	1	1/2

y	z	Вероятность
-1	-1	1/2
-1	0	0
-1	1	0
0	-1	0
0	0	0
0	1	0
1	-1	0
1	0	0
1	1	1/2

z	x	Вероятность
-1	-1	1/2
-1	0	0
-1	1	0
0	-1	0
0	0	0
0	1	0
1	-1	0
1	0	0
1	1	1/2

Таблица 3.2: Маргинальные распределения целого множества на дуплетах

Указанным маргинальным распределениям соответствует распределение на $3^{\mathcal{X}}$, приведенное в таблице 3.3 (показаны только две вероятности, отличные от нуля; вероятности остальных 25 значений равны 0).

x	y	z	Вероятность
-1	-1	-1	1/2
1	1	1	1/2

Таблица 3.3: Совместное распределение целого множества на $\{x, y, z\}$

Видно, что данная модель также является избыточной: из 27 возможных значений целого подмножества нетривиальным образом используются только 2. Избыточность в данном случае не столь велика, как в пункте 3.1, но и здесь за использование неотрицательных вероятностных мер приходится платить громоздкостью модели.

4. Другие вероятностные модели

Рассмотренный парадокс не является характерной чертой теории случайных множеств, и может быть легко воспроизведен в рамках других вероятностных моделей с участием совместного распределения трех и более случайных объектов. Проблема заключается в том, что не удается произвольно задавать двумерные маргинальные распределения; может оказаться, что трехмерное совместное распределение с такими маргинальными распределениями в обычном смысле не существует, то есть, вероятностям некоторых событий приходится приписывать отрицательные значения.

Тривиальный пример такого рода получается "дословным переводом" рассмотренного парадокса на язык случайных векторов в $\mathbf{R}^3$ со значениями в вершинах единичного куба. Пусть (X, Y, Z) – случайный вектор в $\mathbf{R}^3$, компоненты которого могут принимать только значения 0 или 1. Зададим двумерные распределения следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((X,Y)=(0,0))=\mathbf{P}((X,Y)=(1,1))=0,\\
\mathbf{P}((X,Y)=(0,1))=\mathbf{P}((X,Y)=(1,0))=1/2,\\
\mathbf{P}((X,Z)=(0,0))=\mathbf{P}((X,Z)=(1,1))=0,\\
\mathbf{P}((X,Z)=(0,1))=\mathbf{P}((X,Z)=(1,0))=1/2,\\
\mathbf{P}((Y,Z)=(0,0))=\mathbf{P}((Y,Z)=(1,1))=0,\\
\mathbf{P}((Y,Z)=(0,1))=\mathbf{P}((Y,Z)=(1,0))=1/2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Так же, как и в параграфе 2.1, убеждаемся, что ни одного истинного вероятностного распределения (X,Y,Z) с такими маргинальными распределениями не существует, хотя можно указать одномерный класс "фантомных" распределений, согласованных с (4.1). Отметим, что корреляции парных распределений в (4.1) равны -1. В вероятностных приложениях, скажем, к построению финансовых портфелей, факт невозможности сильных отрицательных парных корреляций в многомерных распределениях хорошо известен.[2] Читатель без труда сможет построить и другие примеры парадокса в $\mathbf{R}^3$.

Укажем еще на связь рассмотренной проблемы с так называемым конджойнт-анализом [3], который также можно рассматривать в свете воспроизведения многомерного совместного распределения по некоторым заданным маргинальным распределениям. Может оказаться, что при заданных рейтингах парных предпочтений качеств продукта не найдется ни одного совместного рейтинга, согласованного с измеренными парными данными.

5. Заключение

В работе рассмотрен парадокс, связанный с несуществованием вероятностного распределения случайного множества с заданным набором распределений его случайных подмножеств. Этот парадокс, по существу, отражает известный вероятностный факт: не всякий набор парных маргинальных распределений представляет некоторое "легитимное" трехмерное вероятностное распределение. Рассмотренные в работе расширения исходной модели ясно указывают на возможность устранения парадокса. К сожалению, за это приходится платить переходом к более громоздкой модели. Поэтому представляется уместным развитие и другого подхода, связанного с использованием знакопеременных вероятностных мер.

В защиту высказанного утверждения можно высказать два довода. Во-первых, в некоторых областях естествознания, например, в квантовой механике (см. [4]), уже возникла потребность в использовании отрицательных вероятностей, которым, судя по всему, в будущем удастся придать содержательный смысл. Во-вторых, как показывает рассмотренный пример, и в обычном макромире использование знакопеременных вероятностных мер может привести к более компактному математическому описанию, которое можно использовать, по крайней мере, в качестве математического аппарата, с тем, чтобы переходить в расширенному описанию только при окончательной содержательной трактовке результатов. Здесь уместна аналогия с комплексными числами, которые активно используются в самых различных областях математики, в

[2] Распространено даже заблуждение, что в трехмерном распределении невозможно появление трех отрицательных парных корреляций.

том числе, в теории вероятностей, и не препятствуют окончательной содержательной интерпретации результатов модели в терминах обычных вещественных чисел.

В "знакопеременной" теории вероятностей, если таковая когда-либо будет построена, возникнут такие интересные объекты, как отрицательная дисперсия, ковариационная матрица, не являющаяся неотрицательно определенной, комплекснозначное стандартное отклонение, и многое другое. Справедливости ради стоит отметить, что значительная часть этой теории уже существует в рамках теории функции множества (знакопеременных мер). Осталось лишь снабдить объекты этой теории вероятностным содержанием, и заполнить все имеющиеся в ней (многочисленные!) пробелы, связанные с новым содержанием теории. Будем надеяться, что пытливого читателя в этой стране ожидает увлекательное путешествие.

Благодарности

Автор выражает свою искреннюю признательность участникам ФАМ Семинара за интересные дискуссии и идеи, давшие пищу и для настоящей работы.

Список литературы

[1] А.А.Бездомников, О.Ю.Воробьев (2001) Объяснение одного парадокса фантомного случайного множества под триплетом. В кн.: *Статистическая метафизика*, ИВМ СО РАН, Красноярск, с. 161–167.

[2] О.Ю.Воробьев (2002) *Случайные конечные абстрактные множества: теория и приложения.* ИВМ СО РАН, Красноярск, 340 с. (будет опубликовано).

[3] О.Ю.Воробьев (2002) Эвентология и конджойнт-анализ рыночных свойств мяча для гольфа. *Частное сообщение.*

[4] Feynman, R.P. (1988) Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, **21**, No. 6,7, p. 467-488.