Стохастическое доминирование и его приложения в моделировании риска

А.А. Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036
e-mail: anov@icm.krasn.ru, тел. (3912) 495382

Аннотация

В работе приведен краткий обзор понятий стохастического доминирования, изучены некоторые свойства этого отношения порядка, и сформулированы нерешенные проблемы, представляющие интерес в теории риска.

1 Введение

Теория принятия решений в условиях риска и неопределенности имеет многочисленные приложения в экономике, финансах, исследовании здоровья и состояния окружающей среды, а также во многих других областях человеческой деятельности. Основной проблемой в принятии решений является нахождение рационального, эффективного или оптимального решения. При принятии решений в условиях риска приходится сравнивать между собой вероятностные распределения, определяя, какое из них является наилучшим [1]. Поэтому частичное или полное упорядочение множеств вероятностных распределений представляет собой один из важнейших инструментов теории риска.

Индивидуальные предпочтения людей на множестве вероятностных распределений оказываются согласованными со стохастическими порядками на этом множестве, поэтому изучение стохастических порядков, в частности, стохастического доминирования, представляет значительный интерес. Наиболее полным изложением вопросов, связанных со стохастическим доминированием и его приложениями, является, по-видимому, книга [2]. В данной работе рассматриваются понятия стохастического доминирования, изучаются некоторые свойства этих порядков, и формулируются проблемы, решение которых представляет интерес для теории риска.

2 Основные понятия и обозначения

Обозначим $\mathcal{F}$ совокупность всех вещественных функций распределения, то есть, неубывающих непрерывных справа функций $F : (-\infty, \infty) \to [0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1. \tag{1}$$

Для удобства обозначим X_F (произвольную) случайную величину, имеющую функцию распределения F, а F_X – функцию распределения случайной величины X: $F_X(v) = \mathbf{P}\{X \le v\}$.

Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим моменты μ_k и моментные функции $\mu_k(x)$, $x \in \mathbf{R}$ функции распределения F равенствами

$$\mu_k = \mu_k^F = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, dF(t) \tag{2}$$

и

$$\mu_k(x) = \mu_k^F(x) = \int_{-\infty}^{x} t^k \, dF(t). \tag{3}$$

Известно [3], что существование μ_k для некоторого $k > 0$ влечет существование всех μ_i для $i = 1, \ldots, k-1$. Для $k \ge 0$ обозначим $\mathcal{F}_k$ множество всех функций распределения, обладающих конечным k-м моментом

$$\mathcal{F}_k = \left\{F \in \mathcal{F} : \, |\mu_k^F| < \infty\right\},$$

а $\mathcal{F}_\infty$ – множество функций распределения, обладающих конечными моментами всех порядков:

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k.$$

Ясно, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Для дальнейшего выделим два специальных класса распределений. Для $a \in \mathbf{R}$ обозначим $W_a \in \mathcal{F}$ вырожденную функцию распределения

$$W_a(v) = \begin{cases} 0, & v < a, \\ 1, & a \le v. \end{cases} \tag{4}$$

Для $-\infty < a < b < \infty$ и $p \in (0,1)$ обозначим $B_{a,b,p}$ функцию распределения Бернулли

$$B_{a,b,p}(v) = \begin{cases} 0, & v < a, \\ 1-p, & a \le v < b, \\ 1, & b \le v. \end{cases} \tag{5}$$

3 Стохастическое доминирование

Для заданной $F \in \mathcal{F}$ определим последовательно функции $F^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$F^{(1)}(x) = F(x), \quad F^{(k+1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(k)}(t) \, dt, \quad -\infty < x < \infty. \tag{6}$$

Отметим, что функция $F^{(k+1)}$ определена для всех $F \in \mathcal{F}_k$, см. лемму 3.2.

Определение 3.1 *Пусть $F, G \in \mathcal{F}_k$. Будем говорить, что F предшествует G в смысле стохастического доминирования порядка k, $F \le_k G$, если*

$$F^{(k)}(x) \ge G^{(k)}(x), \; -\infty < x < \infty.$$

3.1 Свойства интегральных функций распределения

Рассмотрим некоторые свойства интегральных функций распределения (6).

Лемма 3.1 *Для любого $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ и любого целого $k \geq 0$ имеет место*

$$F_{aX+b}^{(k+1)}(x) = a^k F_X^{(k+1)}\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Доказательство. Для $k = 0$ (7) представляет собой известное свойство функции распределения. Для $k \geq 1$ (7) легко вытекает по индукции из определения (6).

Следующая лемма составляет содержание предложения 1 из работы [4].

Лемма 3.2 *Для любого целого $k \geq 0$ включение $F \in \mathcal{F}_k$ влечет*

$$F^{(k+1)}(x) = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^k\, dF(t). \tag{8}$$

Доказательство. Для $k = 0$ представление (8) очевидно. Предполагая, что (8) выполняется для $k-1$:

$$F^{(k)}(t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{k-1}\, dF(s), \tag{9}$$

покажем справедливость этого утверждения для k, доказывая его, тем самым, по индукции. Действительно, из (6) и (9) получаем

$$F^{(k+1)}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{k-1}\, dF(s)\, dt$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{x}\int_{s}^{x}(t-s)^{k-1}\, dt\, dF(s) = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{x}(x-s)^k\, dF(s), \tag{10}$$

что и требовалось.

Из леммы (3.2) вытекает существование $F^{(k+1)}$ для всех $F \in \mathcal{F}_k$.

Лемма 3.3 *Пусть $F, G \in \mathcal{F}$, $\alpha \in [0,1]$, и пусть $H = \alpha F + (1-\alpha)G$ является смесью функций распределения F и G. Тогда*

$$H^{(k)} = \alpha F^{(k)} + (1-\alpha)G^{(k)}. \tag{11}$$

Доказательство немедленно вытекает из определения.

Далее, рассмотрим поведение $F^{(k)}(x)$ при $x \to \infty$. Оказывается, что эта функция стремится к бесконечности со скоростью полинома.

Предложение 3.1 *Для любого целого $k \geq 0$ справедливо*

$$\lim_{x\to\infty} F^{(k+1)}(x) - a_k(x) = 0, \tag{12}$$

где

$$a_k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i}\mu_i \tag{13}$$

является полиномом степени k с положительным старшим коэффициентом $1/k!$, а

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}, \quad 0 \leq i \leq k$$

представляют собой биномиальные коэффициенты.

Доказательство. По лемме 3.2 имеем

$$F^{(k+1)}(x) = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i} t^i\, dF(t) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i}\mu_i(x),$$

так что

$$F^{(k+1)}(x) - a_k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i}(\mu_i(x) - \mu_i) \to 0 \text{ as } x \to \infty.$$

Поскольку

$$0 \le x^{k-i}(\mu_i - \mu_i(x)) = x^{k-i}\int_x^{\infty} t^i\, dF(t) \le \int_x^{\infty} t^k\, dF(t) \to 0 \text{ as } x \to \infty,$$

доказательство завершено.

Сформулируем еще одно свойство стохастического доминирования, прямо вытекающее из определения.

Предложение 3.2 *Пусть $F, G \in \mathcal{F}_k$ и $F \le_k G$. Тогда $F \le_{k+1} G$.*

3.2 Примеры

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $F = W_0$ – вырожденная функция распределения. Тогда

$$W_0^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^k/k!, & x \ge 0. \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку W_1 является сдвигом W_0, по лемме (3.1) имеем

$$W_1^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)^k/k!, & x \ge 1. \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Далее, применяя лемму 3.3 к распределению Бернулли $B_{0,1,p}$, являющемуся смесью двух вырожденных распределений $B_{0,1,p} = (1-p)W_0 + pW_1$, получаем

$$B_{0,1,p}^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1-p)x^k/k!, & 0 \le x < 1, \\ [(1-p)x^k + p(x-1)^k]/k!, & x \ge 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Вычислим интегральные функции распределения для показательного распределения с параметром $\lambda > 0$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda x), & x \ge 0. \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое $k = 0, 1, \ldots$. Имеем $F^{(k+1)}(x) = 0$ при $x < 0$, и

$$F^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \frac{x^{k-i}}{(k-i)!\lambda^i} - \frac{(-1)^k}{\lambda^k}\exp(-\lambda x), \quad x \ge 0.$$

Для доказательства достаточно проверить равенство при $k = 0$, а затем убедиться в справедливости равенств $\frac{d}{dx}F^{(k+1)}(x) = F^{(k)}(x)$ и $F^{(k+1)}(0) = 0$, что не представляет затруднений.

3.3 Характеризация стохастического доминирования

Стохастическое доминирование можно характеризовать различными способами; мы опишем характеризацию в терминах ожидаемой полезности и случайных величин – представителей.

Для функции полезности $U: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и функции распределения $F \in \mathcal{F}$ обозначим $\overline{U}(F) = \int U(x)\,dF(x)$ функционал ожидаемой полезности. Скажем, что частичный порядок $\leq$ на $\mathcal{F}$ или некотором его подмножестве представлен классом $\mathcal{U}$ функций полезности, если для произвольных $F, G \in \mathcal{F}$ (или, соответствующего подмножества)

$$F \leq G \iff \overline{U}(F) \leq \overline{U}(G), \quad U \in \mathcal{U}.$$

Отметим, что заменой переменных $v = F(x)$ нетрудно получить представление

$$\overline{U}(F) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\,dv. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим классы, представляющие стохастическое доминирование различных порядков.

Следующее предложение можно найти, например, в [5].

Предложение 3.3 *Стохастическое доминирование первого порядка представляется классом $\mathcal{U}_m$ неубывающих функций*

$$\mathcal{U}_m = \{U: \mathbf{R} \to \mathbf{R} |\ U \textit{ не убывает } \}.$$

Доказательство. Пусть $F \leq_1 G$, а U – неубывающая функция на $\mathbf{R}$. Имеем $F(x) \geq G(x)$, $x \in \mathbf{R}$, откуда $F^{-1}(v) \leq G^{-1}(v)$, $v \in [0,1]$. Используя (14), получаем

$$\overline{U}(F) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\,dv \leq \int_0^1 U(G^{-1}(v))\,dv = \overline{U}(G).$$

Таким образом, $F \leq_1 G$ влечет $\overline{U}(F) \leq \overline{U}(G)$ для всех $U \in \mathcal{U}_m$.

Пусть теперь $F, G \in \mathcal{F}$ и $\overline{U}(F) \leq \overline{U}(G)$ для всех $U \in \mathcal{U}_m$. Предположим, что стохастическое доминирование первого порядка отсутствует, то есть, найдется x_0 такое, что $F(x_0) < G(x_0)$. Выберем

$$x_1 = \sup\{x: \ F(x) < G(x_0)\}.$$

Поскольку F непрерывна справа, $x_1 > x_0$ и

$$F^{-1}(v) > G^{-1}(v) \quad \text{для всех} \quad v \in [F(x_0), F(x_1)).$$

Рассмотрим $U \in \mathcal{U}_m$ вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ (x - x_0)/(x_1 - x_0), & x_0 < x < x_1, \\ 1, & x \geq x_1. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\overline{U}(F) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\,dv = \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} U(F^{-1}(v))\,dv > \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} U(G^{-1}(v))\,dv = \overline{U}(G).$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Далее, рассмотрим класс всех неубывающих вогнутых функций

$$\mathcal{U}_{mc} = \{U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}| \; U \text{ не убывает и вогнута}\}.$$

Напомним, что U называется вогнутой функцией на $\mathbf{R}$, если

$$U(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \; \alpha \in [0,1].$$

Следующее предложение приведено в [5].

Предложение 3.4 *Стохастическое доминирование второго порядка представляется классом* $\mathcal{U}_{mc}$.

В [6] приведена еще такая характеризация первого стохастического доминирования.

Предложение 3.5 $F \leq_1 G$ *в том и только в том случае, когда существуют случайные величины* X, Y *с функциями распределения* F, G*, соответственно, такие, что*

$$X \leq Y \text{ почти наверное.}$$

Доказательство сразу получается при использовании случайных величин $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$, $Y(\omega) = G^{-1}(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$, где $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра, а λ – мера Лебега.

4 Двойственное доминирование

В определении стохастического доминирования бросается в глаза асимметрия определения: понятие основано на поведении распределений на левом хвосте. Такое определение оказывается естественным в задачах принятия решений относительно распределений "доход минус убыток"(чем больше, тем лучше). В некоторых случаях, например, в страховании и актуарных задачах, более естественно рассматривать распределение "убыток минус доход"(чем меньше, тем лучше), см. [7]. При этом необходимо использовать двойственное понятие стохастического доминирования, которое в терминах случайных величин можно описать следующим образом: X доминирует Y в смысле двойственного стохастического доминирования порядка k: $X \geq_k^* Y$ если $(-Y) \geq_k (-X)$.

Обозначим S_X дополнительную функцию распределения случайной величины X: $S_X(v) = \mathbf{P}\{X > x\}$, а $\mathcal{S}$ – множество всех дополнительных функций распределения на $\mathbf{R}$, то есть, невозрастающих, непрерывных справа функций S, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{v \to -\infty} S(v) = 1, \quad \lim_{v \to \infty} S(v) = 0. \tag{15}$$

Для функций S из подмножества дополнительных функций распределения $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$, обладающих конечными моментами всех порядков, зададим интегральные дополнительные функции распределения $S^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ посредством

$$S^{(1)}(x) = S(x), \quad S^{(k+1)}(x) = \int_x^\infty S^{(k)}(t)\, dt, \qquad -\infty < x < \infty, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Несложно убедиться в том, что двойственное стохастическое доминирование порядка k можно определить и в терминах интегральных функций распределения $S^{(k)}(\cdot)$, а именно, для $S, T \in \mathcal{S}_\infty$ верно

$$S \leq_k^* T \iff S^{(k)}(x) \leq T^{(k)}(x),\ x \in (-\infty, \infty).$$

5 Некоторые нерешенные задачи

5.1 Полное стохастическое доминирование

Пусть $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$, как и раньше, обозначает множество функций распределения, обладающих конечными моментами всех порядков. Обозначим

$$Q_k \subseteq \mathcal{F}_\infty \times \mathcal{F}_\infty = \mathcal{Q}_\infty$$

множество, описывающее отношение стохастического доминирования порядка k на $\mathcal{F}_\infty$, то есть

$$Q_k = \{(F, G) \in \mathcal{Q}_\infty |\ F \leq_k G\}.$$

Из предложения 3.2 вытекает, что $Q_k \subseteq Q_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots$. Представляют интерес ответы на следующие вопросы:

1. Как выглядит множество
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \lim_{k \to \infty} Q_k = Q_\infty\ ?$$
Совпадает ли оно с $\mathcal{Q}_\infty$ (ответ, по-видимому, отрицателен)?

2. Вывести характеризацию Q_∞ в терминах классов функций полезности.

3. Пусть d – некоторая метрика на $\mathcal{Q}_\infty$. Вычислить диаметры $\mathcal{Q}_\infty$ и Q_∞, и сравнить их: насколько подмножество Q_∞ "уже"$\mathcal{Q}_\infty$?

5.2 Стохастическое доминирование нецелого порядка

Отметим, что лемма 3.2 позволяет распространить определение $F^{(k)}$ на произвольные вещественные числа $r \geq 0$:

$$F^{(r+1)}(x) = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^r \, dF(t), \tag{16}$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Пользуясь интегральными функциями распределения $F^{(r+1)}(\cdot)$, можно ввести понятие стохастического доминирования вещественного порядка $r \geq 1$:

$$F \leq_r G \iff F^{(r)}(x) \geq G^{(r)}(x),\ \ x \in (-\infty, \infty).$$

В этой связи возникают следующие задачи:

1. Выяснить содержательный (вероятностный) смысл стохастического доминирования нецелого порядка.

2. Охарактеризовать классы Q_r, $r \geq 1$ в терминах классов функций полезности.

5.3 Другие задачи

В 3.3 описана характеризация стохастического доминирования первого порядка случайными величинами. Интересно было бы получить аналогичную характеризацию и для отношений доминирования более высоких порядков.

Все результаты, касающиеся прямого стохастического доминирования, имеют аналоги для двойственного отношения, введенного в 4. Для дальнейшего развития теории важно сформулировать и доказать эти результаты.

При $k = 1$ понятия прямого и двойственного стохастического доминирования, очевидно, совпадают. Для отношений высших порядков это уже неверно, что можно заметить из следующего примера с бернуллиевскими и вырожденными распределениями. Пусть

$$F = B_{0,3,1/2}, \quad G = W_2 .$$

Ясно, что $F \leq_2 G$, но эти распределения несравнимы в смысле двойственного доминирования второго порядка. Противоположный пример получается при том же распределении F и $G = W_1$. Отсюда вытекает проблема выяснения взаимоотношений множеств Q_k и аналогичных множеств Q_k^*, задающих соответствующие отношения в $\mathcal{Q}_\infty$.

Список литературы

[1] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения.* Наука: Новосибирск, 102 с.

[2] M.Shaked, J.G.Shanthikumar (1994) *Stochastic Orders and Their Applications.* Academic Press, London.

[3] M.Loeve (1960) *Probability theory.* Van Nostrand N.Y.

[4] W.Ogryczak, A.Ruszczynski (2001) On consistency of stochastic dominance and mean-semideviation models. *Math. Program.*, Ser B **89**, 2, 217–232.

[5] M.Kijima, M.Ohnishi (1999) Stochastic orders and their applications in financial optimization. *Math. Meth. Oper. Res.*, **50**, 2, 351–372.

[6] Bauerle, N., and Muller, A. (1998) *Modeling and Comparing Dependences in Multivariate Risk Portfolios* ASTIN Bulletin, **28**, 1, pp. 59–76.

[7] S.Wang (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.