МОНОТОННОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ НЕКОТОРЫХ МЕР РИСКА

Аркадий Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
anov@scientist.com

Рассматриваются свойства монотонности некоторых мер риска относительно естественных порядков на множестве распределений: стохастического доминирования, опасности, неприятия риска. Изучается выпуклость этих мер риска, как функционалов на пространствах распределений и случайных величин.

Ключевые слова и фразы: риск, мера риска, принятие решений, монотонность, выпуклость, вогнутость, предпочтения, ожидаемая полезность, возмущенная вероятность, портфельный анализ.

MONOTONICITY AND CONVEXITY OF SOME RISK MEASURES

Arcady Novosyolov

Institute of computational modeling SB RAS
anov@scientist.com

Monotonicity of certain risk measures with respect to natural orderings (stochastic dominance, dangerousness, risk aversion) of distributions is being considered. Convexity properties of these measures are established when the latter are treated as functionals both on distributions and variables spaces.

Key words and phrases: risk, risk measure, decision-making, monotonivity, convexity, concavity, preferences, expected utility, distorted probability, portfolio analysis.

Введение

В задачах принятия решений в условиях вероятностной неопределенности (риска), имеющих форму оптимизационных задач, в качестве целевой функции обычно выступает некоторая мера риска [1,2]. Для получения приемлемых решений важно обеспечивать согласованность целевых функций с естественными порядками на множестве вероятностных распределений; другими словами - в качестве целевых функций следует использовать функционалы, монотонные относительно этих естественных порядков. С другой стороны, выпуклость (вогнутость) целевой функции позволяет существенно упростить решение задачи минимизации (максимизации).

В настоящей работе приводятся свойства монотонности и выпуклости некоторых широко используемых, а также новых мер риска с точки зрения применения этих функционалов в задачах принятия решений.

Задача принятия решений и меры риска.

Напомним вкратце постановку задачи [2]. Пусть $(\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство состояний среды, $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ - измеримое пространство результатов, $\mathbf{D}$ - множество решений (действий). Пусть, далее, отображение $f : \mathbf{S} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ при каждом фиксированном $d \in \mathbf{D}$ измеримо относительно пары σ-алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, так что $f_d(s) = f(s,d)$, $s \in \mathbf{S}$ порождает на $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ вероятностное распределение $\mathbf{P}_d$:

$$\mathbf{P}_d(B) = \mathbf{P}(f_d^{-1}(B)),\ B \in \mathbf{B}.$$

Предположим, что на множестве распределений $\mathbf{F} = \{\mathbf{P}_d, d \in \mathbf{D}\}$ задано отношение предпочтения $\leq$. Задача заключается в поиске решения $d \in \mathbf{D}$, приводящего к наилучшему в смысле отношения $\leq$ распределению $\mathbf{P}_d$. По теореме из [2] при выполнении некоторых естественных условий отношение $\leq$ можно единственным образом представить мерой риска $\mu : \mathbf{F} \to R$, сведя, таким образом, задачу принятия решения к задаче условной оптимизации вида

$$\mu(F) \to \max_{P \in \mathbf{F}} \left(\min_{F \in \mathbf{F}} \right)$$

или

$$h(d) = \mu(\mathbf{P}_d) \to \max_{d \in \mathbf{D}} \left(\min_{d \in \mathbf{D}} \right). \tag{1}$$

Во многих случаях, как, например, в задаче распределения ресурсов, множество решений $\mathbf{D}$ является выпуклым подмножеством некоторого линейного пространства. При этом выпуклость (вогнутость) функции h на $\mathbf{D}$ позволяет применять методы выпуклого программирования, существенно упрощая решение (1).

Пусть $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ - вещественное измеримое пространство. Далее описываются свойства монотонности относительно естественных порядков на $\mathbf{F}$ и выпуклости следующих мер риска:

а) математическое ожидание $\varepsilon(F) = \int x dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

б) дисперсия $\delta(F) = \int (x - \varepsilon(F))^2 dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

в) смешанный функционал ($\beta > 0$) $\theta(F) = \delta(F) - \beta\varepsilon(F)$, $F \in \mathbf{F}$;

г) ожидаемая полезность $\rho(F) = \int U(x) dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

д) функционал возмущенной вероятности

$$\pi(F) = \int_{-\infty}^{0} [g(1 - F(x)) - 1] dx + \int_{0}^{\infty} g(1 - F(x)) dx,\ F \in \mathbf{F}.$$

Здесь $U : \mathbf{R} \to R$ - функция полезности, а $g : [0,1] \to [0,1]$ - возмущающая функция вероятности, $g(0) = 0, g(1) = 1$.

Порядки на множестве распределений.

Для $F \in \mathbf{F}$ обозначим E_F математическое ожидание распределения F. Нам потребуются следующие порядки на множестве распределений $\mathbf{F}$:

а) первое стохастическое доминирование, $F \leq_1 G \Leftrightarrow F(x) \geq G(x), x \in R$;

б) порядок опасности, $F \leq_d G \Leftrightarrow E_F \leq E_G$ и существует такая точка $c \in R$, что $F(x) \leq G(x), x < c$ и $F(x) \geq G(x), x \geq c$;

в) второе стохастическое доминирование, $F \leq_2 G \Leftrightarrow$ найдется конечная совокупность $H_1, ..., H_n \in \mathbf{F}$ такая, что $F \leq_d H_1 \leq_d H_2 \leq_d ... \leq_d H_n \leq_d G$;

г) неприятие риска, $F \leq_a G \Leftrightarrow G$ является вырожденным распределением в некоторой точке $b \in R$ и $E_F = b$.

Пусть $\leq$ - какой-либо из порядков на $\mathbf{F}$ или отношение предпочтения на этом множестве. Скажем, что функционал $\mu:\mathbf{F}\to R$ является монотонным относительно $\leq$, если $F\leq G$ влечет $\mu(F)\leq\mu(G)$.

Понятия выпуклости

Пусть множество всех распределений $\mathbf{F}$ выпукло. Скажем, что мера риска μ выпукла по распределению, если $\mu(\lambda F+(1-\lambda)G)\leq\lambda\mu(F)+(1-\lambda)\mu(G)$ для произвольных $F,G\in\mathbf{F}$, $\lambda\in[0,1]$. Для $F\in\mathbf{F}$ обозначим X_F каноническую случайную величину [1] с функцией распределения F, а $\mathbf{X}$ - совокупность всех таких случайных величин. Ввиду взаимной однозначности соответствия между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{X}$ любую меру риска можно считать заданной на $\mathbf{X}$. Скажем, что μ выпукла по значению, если для произвольных $X,Y\in\mathbf{X}$ имеет место $\mu(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\mu(Y)+(1-\lambda)\mu(Y)$, $\lambda\in[0,1]$. Понятия вогнутости, а также строгой выпуклости и вогнутости вводятся обычным способом. Назовем еще меру риска μ линейной в соответствующем смысле, если она является одновременно выпуклой и вогнутой в этом смысле.

Кроме обычного понятия выпуклости функционала на выпуклом множестве линейного пространства нам понадобится еще понятие выпуклости по портфелю, которое имеет смысл в задаче портфельного анализа (распределения ресурсов) [2,3]. Пусть $(X_1,\ldots,X_n)$ - случайный вектор, представляющий набор инвестиционных инструментов, $\mathbf{D}\subseteq\{(y_1,\ldots,y_n):y_1+\ldots+y_n=1\}$ - выпуклое множество решений. Скажем, что мера риска μ является выпуклой по портфелю, если функция $f_\mu(y)=\mu(y_1X_1+\ldots+y_nX_n)$ является выпуклой на $\mathbf{D}$. Оказывается, понятия выпуклости меры риска по значению и по портфелю эквивалентны. Именно, справедлива

Теорема 1. *Мера риска $\mu:\mathbf{F}\to R$ выпукла по портфелю в том и только в том случае, когда она выпукла по значению.*

Монотонность

Приведем здесь условия, при которых перечисленные выше меры риска являются монотонными.

Математическое ожидание ε является неубывающим функционалом относительно всех рассматриваемых порядков.

Дисперсия δ и смешанный функционал θ являются строго убывающими относительно неприятия риска, и не являются монотонными относительно других порядков.

Условия монотонности оставшихся мер риска описаны в следующих теоремах

Теорема 2. *Ожидаемая полезность ρ является неубывающей (невозрастающей) относительно первого стохастического доминирования тогда и только тогда, когда функция U является неубывающей (невозрастающей).*

Теорема 3. *Ожидаемая полезность ρ является неубывающей (невозрастающей) относительно неприятия риска тогда и только тогда, когда функция U вогнута (выпукла).*

Теорема 4. *Возмущенная вероятность π является неубывающей относительно первого стохастического доминирования тогда и только тогда, когда функция g является неубывающей.*

Теорема 5. *Возмущенная вероятность* π *является неубывающей (невозрастающей) относительно неприятия риска тогда и только тогда, когда* $g(x) \le x, x \in [0,1]$ *(* $g(x) \ge x, x \in [0,1]$ *).*

Теорема 6. *Возмущенная вероятность* π *является неубывающей относительно второго стохастического доминирования тогда и только тогда, когда функция* g *вогнута.*

Выпуклость

Функционал математического ожидания ε является линейным по значению и по распределению. Дисперсия δ и смешанный функционал θ являются (нестрого) выпуклыми по значению и вогнутыми по распределению. Ожидаемая полезность ρ линейна по распределению. Остальные условия выпуклости приведены в следующих теоремах.

Теорема *7. Ожидаемая полезность* ρ *выпукла (вогнута) по значению тогда и только тогда, когда функция* U *выпукла (вогнута).*

Теорема 8. *Возмущенная вероятность* π *выпукла по значению тогда и только тогда, когда функция* g *вогнута.*

Теорема 9. *Возмущенная вероятность* π *вогнута по распределению тогда и только тогда, когда функция* g *вогнута.*

Список литературы

1. А.А. Новоселов. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2001.
2. А.А. Новоселов. Понятие риска и методы его измерения. Наст сб..
3. H. Markowitz. Mean - Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Cambridge, Massachusetts: Blackwell, 1990.