ПОНЯТИЕ РИСКА И МЕТОДЫ ЕГО ИЗМЕРЕНИЯ

Аркадий Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
anov@scientist.com

Рассматривается задача принятия решений в условиях вероятностной неопределенности (риска). Вводятся понятия риска и меры риска, обсуждается проблема описания предпочтений на множестве вероятностных распределений, приводятся примеры мер риска. Дается аксиоматическое описание процедуры измерения риска для нелинейных предпочтений. Рассматривается пример: задача распределения ресурсов.

Ключевые слова и фразы: риск, мера риска, принятие решений, предпочтения, монотонные функционалы, ожидаемая полезность, возмущенная вероятность, портфельный анализ, распределение ресурсов.

NOTION OF RISK AND METHODS FOR ITS MEASURING

Arcady Novosyolov

Institute of computational modeling SB RAS
anov@scientist.com

Decision-making problem under probabilistic uncertainty (risk) is being considered. Risk and risk measure are defined, some examples of risk measures are presented, and a problem of description of preference relation on a set of probability distributions is treated. An axiomatic description of risk measuring under nonlinear preferences is given. Resourses distribution problem is considered as an example.

Key words and phrases: risk, risk measure, decision-making, preferences, monotone functionals, expected utility, distorted probability, portfolio analysis, resourses distribution.

Введение

Понятие риска в настоящее время является неустоявшимся, а сам термин "риск" используется в литературе в различных смыслах. Так, в страховании и актуарной литературе [1] риском называется объект, подлежащий страхованию, а соответствующим математическим понятием является случайная величина, описывающая размер возможных убытков при наступлении страхового события, или вероятностное распределение этой случайной величины. В лексиконе инвесторов риск означает дисперсию или стандартное отклонение доходности инвестиционного инструмента (портфеля) {2}, то есть, с математической точки зрения, число, характеризующее неопределенность, "рискованность" вероятностного распределения доходности. Задание такого числа для каждого распределения определяет функционал на множестве вероятностных распределений.

Такая несогласованность терминологии препятствует созданию единой математической теории риска и взаимному проникновению идей из одной прикладной области в другую. В настоящей работе обсуждается один терминологический стандарт, позволяющий привести большое количество прикладных задач, связанных с риском, к единой математической схеме, а именно, - к задаче принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В этой схеме риском называется вероятностное распределение, а функционал, характеризующий рискованность различных распределений, называется мерой риска.

Задача принятия решения

В детерминированной постановке задача принятия решения может быть описана следующим образом. Имеется некоторое множество решений (действий) $\mathbf{D}$ и множество результатов $\mathbf{R}$, достижимых посредством действий из $\mathbf{D}$, точнее: задано отображение $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ такое, что принятие решения $d\in\mathbf{D}$ приводит к результату $r=f(d)\in\mathbf{R}$. Если множество $\mathbf{R}$ упорядочено каким-либо отношением $\le$ так, что для $r_1,r_2\in\mathbf{R}$ соотношение $r_1\le r_2$ означает "r_1 не хуже r_2", то задача выбора наилучшего решения представляется в виде обычной задачи оптимизации

$$f(d)\to\max_{d\in\mathbf{D}}. \qquad (1)$$

На практике выбор фиксированного решения $d\in\mathbf{D}$, как правило, не гарантирует достижение вполне определенного результата $r\in\mathbf{R}$, что можно представить в математической модели в виде влияния на результат неопределенного состояния среды. Пусть всевозможные состояния среды описываются множеством $\mathbf{S}$, тогда получение результата можно представить в виде отображения $f:\mathbf{S}\times\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, так что принятие решения $d\in\mathbf{D}$ при условии, что среда оказывается в состоянии $s\in\mathbf{S}$ приводит к результату $r=f(s,d)\in\mathbf{R}$.

Поскольку в момент принятия решения состояние среды s неизвестно, представление задачи принятия решения в виде (1) становится невозможным. В рамках теории риска естественно предполагать, что неопределенность состояний среды носит вероятностный характер. Моделировать такую неопределенность можно, вводя на множестве $\mathbf{S}$ структуру вероятностного пространства $(\mathbf{S},\mathbf{A},\mathbf{P})$, на множестве результатов - структуру измеримого пространства $(\mathbf{R},\mathbf{B})$, и считая отображение f измеримым (при каждом фиксированном $d\in\mathbf{D}$) относительно пары σ -алгебр $\mathbf{A},\mathbf{B}$. При этом каждому решению $d\in\mathbf{D}$ можно поставить в соответствие отображение $f_d:\mathbf{S}\to\mathbf{R}$ по правилу $f_d(s)=f(s,d)$, $s\in\mathbf{S}$. Распределение на множестве состояний среды $\mathbf{P}$ и отображение f_d порождают на $(\mathbf{R},\mathbf{B})$ вероятностное распределение $\mathbf{P}_d$:

$$\mathbf{P}_d(B)=\mathbf{P}(f_d^{-1}(B)),\ B\in\mathbf{B}.$$

Таким образом, каждое решение $d\in\mathbf{D}$ приводит при наличии неопределенности к некоторому распределению $\mathbf{P}_d$. Выбор наилучшего решения означает выбор "наилучшего" распределения из множества распределений $\mathbf{F}=\{\mathbf{P}_d, d\in\mathbf{D}\}$.

Предпочтения и функционалы на $\mathbf{F}$.

Для сравнения распределений из $\mathbf{F}$ можно задать на $\mathbf{F}$ отношение предпочтения, то есть, полное транзитивное отношение $\le$. При этом для $F_1,F_2\in\mathbf{F}$ запись $F_1\le F_2$ понимается, как "F_2 не хуже, чем F_1". Всякое отношение предпочтения порождает на $\mathbf{F}$ также отношение эквивалентности $\sim$ по правилу $F_1\sim F_2 \Leftrightarrow F_1\le F_2, F_1\ge F_2$.

Традиционным способом введения на $\mathbf{F}$ отношения предпочтения (сравнения распределений из $\mathbf{F}$) является задание на $\mathbf{F}$ какого-либо вещественно-значного функционала $\mu : \mathbf{F} \to R$. При этом

$$F_1 \le F_2 \iff \mu(F_1) \le \mu(F_2) \qquad (2)$$

(или, для некоторых функционалов, $\mu(F_1) \ge \mu(F_2)$). Проблема принятия наилучшего решения сводится в этом случае к решению оптимизационной задачи

$$\mu(F) \to \max_{F \in \mathbf{F}} \left(\min_{F \in \mathbf{F}} \right).$$

Мы будем далее называть **риском** произвольное распределение из $\mathbf{F}$, а **мерой риска** - функционал $\mu : \mathbf{F} \to R$, монотонный относительно предпочтений на $\mathbf{F}$ в смысле (2).

Приведем некоторые примеры функционалов для случая $\mathbf{R} \subseteq R$:

а) математическое ожидание $\varepsilon(F) = \int x dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

б) дисперсия $\delta(F) = \int (x - \varepsilon(F))^2 dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

в) смешанный функционал ($\beta > 0$) $\theta(F) = \delta(F) - \beta\varepsilon(F)$, $F \in \mathbf{F}$;

г) ожидаемая полезность $\rho(F) = \int U(x) dF(x)$, $F \in \mathbf{F}$;

д) функционал возмущенной вероятности

$$\pi(F) = \int_{-\infty}^{0} \left[g(1 - F(x)) - 1 \right] dx + \int_{0}^{\infty} g(1 - F(x)) dx, \ F \in \mathbf{F}.$$

Здесь $U : \mathbf{R} \to R$ - функция полезности, а $g : [0,1] \to [0,1]$ - возмущающая функция вероятности, $g(0) = 0, g(1) = 1$.

Построение меры риска

Выбор функционала μ, достаточно хорошо отражающего предпочтения лица, принимающего решения, является ключом к принятию правильного решения в этой схеме. Поэтому более естественным, хотя и более сложным, представляется противоположный подход, при котором сначала на $\mathbf{F}$ задается отношение предпочтения $\le$, а затем по нему строится мера риска μ.

Первые построения такого рода были, по-видимому, приведены в классической книге [3]. Отношение предпочтения задается в этой работе аксиоматически, причем аксиомы по существу означают линейность предпочтения относительно операции смеси распределений. Аксиомы фон Неймана - Моргенштерна гарантируют существование (и, в определенном смысле, единственность) меры риска, которая оказывается в этом случае ожидаемой полезностью. Линейный случай данной аксиоматикой описывается исчерпывающе.

В нелинейном случае решение обратной задачи существенно усложняется. Приведем здесь один результат из [4]. Всюду далее для простоты изложения будем считать множество результатов $\mathbf{R}$ частью вещественной прямой R, а элементы $\mathbf{F}$ трактовать, как вещественные функции распределения.

Напомним некоторые понятия. Говорят, что F_2 не хуже F_1 в смысле стохастического доминирования: $F_1 \le_s F_2$, если $F_1(x) \le F_2(x)$ при всех вещественных x. Скажем, что отношение предпочтения $\le$ согласовано со стохастическим доминированием, если $F_1 <_s F_2$ влечет $F_1 < F_2$. Для последовательности функций распределения $F_1, F_2, \ldots \in \mathbf{F}$, неубывающей по стохастическому доминированию: $F_1 \le_s F_2 \le_s \ldots$ естественно определяется предел $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ по правилу $F(x) = \inf_n F_n(x)$, $x \in R$. Для функции распределения $F \in \mathbf{F}$ определим двойственную функцию распределения F^c соотношением $F^c(x) = 1 - F(-x)$. Скажем, что $\mathbf{F}$ симметрично, если $F \in \mathbf{F}$ влечет $F^c \in \mathbf{F}$. Скажем, что отношение предпочтения симметрично, если $F_1 \le F_2$ влечет $F_2^c \le F_1^c$. Назовем предпочтение непрерывным относительно смеси распределений, если из цепочки $F_1 \le F_2 \le F_3$ вытекает существование такого $p \in [0,1]$, что $F_2 \sim pF_1 + (1-p)F_2$. Будем говорить, что для функции распределения F существует детерминированный эквивалент, если при некотором $a \in R$ имеет место $F \sim W_a$, где W_a - функция распределения, вырожденного в точке a. Обозначим еще $B_{a,b,p}$ функцию распределения бернуллиевской случайной величины, принимающей значения a и b с вероятностями $1-p$ и p, соответственно.

Теорема. *Пусть на множестве функций распределения* $\mathbf{F}$ *задано симметричное, непрерывное относительно смеси распределений отношение предпочтения* $\le$, *согласованное со стохастическим доминированием. Предположим также, что всякое бернуллиевское распределение обладает детерминированным эквивалентом, и, кроме того, для всякой неубывающей (по стохастическому доминированию) последовательности* $F_1, F_2, ... \in \mathbf{F}$, *ограниченной по предпочтению некоторой функцией распределения* $G \in \mathbf{F}$*:* $F_n \le G$, $n = 1,2,...$ *выполняется* $\lim_{n\to\infty} F_n \le G$. *Тогда существует (единственная с точностью до строго монотонных преобразований) мера риска* μ, *монотонная относительно данного предпочтения.*

Задача распределения ресурсов.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую классическую задачу [2]. Требуется распределить единичный капитал между инвестиционными инструментами, доход от которых характеризуется совместным распределением $\mathbf{P}$ вектора $s = (X_1, ..., X_n)$ в R^n. Здесь $\mathbf{S} = R^n$, $\mathbf{A}$ - борелевская σ-алгебра в R^n, $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ - вещественное измеримое пространство. Множество решений $\mathbf{D}$ представляет собой плоскость $y_1 + ... + y_n = 1$ (или некоторую ее часть) в пространстве векторов $(y_1, ..., y_n)$, компоненты которых - суть доли единичного капитала, вкладываемые в соответствующие инструменты, а результат вычисляется по формуле

$$r = f(s,d) = y_1 X_1 + ... + y_n X_n .$$

Список литературы

1. C.D. Daykin, T. Pentikainen, M. Pesonen. Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman & Hall, 1994.
2. H. Markowitz. Mean - Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Cambridge, Massachusetts: Blackwell, 1990.
3. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука., 1970.
4. А.А. Новоселов. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2001.