О НЕПРИЯТИИ РИСКА И НОРМЕ ЗАМЕЩЕНИЯ РИСКА ДОХОДНОСТЬЮ

А.А. Новоселов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036
e-mail: anov@ksc.krasn.ru

При принятии экономических или управленческих решений обычно не удается спрогнозировать результат каждого индивидуального решения с удовлетворительной точностью. Поэтому приходится признавать неопределенность последствий принятых решений, и, как следствие, для принятия рациональных решений использовать соответствующую теорию. Неопределенность можно моделировать различными способами, однако, наиболее широкое распространение к настоящему времени получило описание неопределенных ситуаций вероятностными распределениями [1]. В этом случае неопределенность ассоциируется с риском, а теорию принятия решений обычно называют теорией риска.

Выбор наилучшего решения в условиях риска основан на сравнении вероятностных распределений "по качеству", и выборе наилучшего распределения среди всех достижимых в данных условиях с помощью имеющихся ограниченных ресурсов. Сравнение вероятностных распределений, даже в случае двух распределений (парное сравнение), оказывается более сложной задачей, чем сравнение определенных (детерминированных) результатов решений, в том числе, в случае вещественных распределений, достаточных для использования во многих экономических задач принятия решений. Один из распространенных способов (парного) сравнения распределений состоит в следующем. Для каждого их двух распределений вычисляется несколько параметров, имеющих ясный содержательный смысл, и сравнение производится на основании значений этих параметров.

Простейшим из способов данного класса является сравнение по значению математического ожидания: лучшим считается распределение, имеющее большее среднее значение (всюду в работе мы предполагаем, что рассматриваются распределения на множестве доходов, "чем больше, тем лучше"). Именно такой способ зачастую используется в современной российской практике. При этом фактически игнорируются всевозможные отклонения от среднего значения, и, тем самым, игнорируется риск, связанный с принимаемыми решениями. Следующим по уровню сложности методом данного класса является метод Марковица, заключающийся в том, что для каждого распределения вычисляются среднее значение и дисперсия, и лучшим признается распределение, имеющее большее среднее значение и меньшую дисперсию. В таком двухпараметрическом методе уже возможны ситуации с несравнимыми парами распределений: если одно из распределений имеет большее среднее значение, и большую дисперсию, то метод не дает определенного ответа на вопрос, какое же из двух распределений лучше. Известны также и другие двух- (и более) параметрические методы сравнения, для которых построена так называемая многоатрибутивная теория полезности, см., например, [3].

Каждый многопараметрический метод сравнения задает на множестве вероятностных распределений лишь частичный порядок, оставляя многие пары распределений несравнимыми. Это приводит к необходимости решать задачи векторной оптимизации, имеющие, как правило, множество так называемых эффективных решений (эффективную границу); выбор единственного решения среди полученных многих решений приходится производить на основании дополнительных соображений. Одним из источников такой дополнительной информации является отношение лица, принимающего решения, к риску. Так, например, в задаче Марковица параметром, характеризующим отношение инвестора к риску, является желаемая ожидаемая доходность портфеля; чем она выше, тем рискованнее инвестор (тем меньше он *не приемлет* риск). В рамках теории ожидаемой полезности [4] отношение к риску оказывается возможным количественно охарактеризовать в терминах некоторой комбинации производных от функции полезности.

В рамках теории второго порядка (Марковиц) рискованность результатов решений измеряется дисперсией прогнозируемого распределения. В рамках теории ожидаемой полезности, предпочтения лиц, принимающих решения, оказываются линейными относительно операции смеси распределений. Многочисленные экспериментальные исследования (см., например, [3]) показали, что истинное человеческое поведение во время принятия решений в значительной степени противоречит упомянутым гипотезам. Поэтому представляет интерес распространение понятия неприятия риска и на другие модели сравнения вероятностных распределений, которые могут оказаться точнее в смысле воспроизведения человеческих предпочтений.

В данной работе понятие (локального) неприятия риска вводится посредством предельной нормы замещения риска детерминированной величиной дополнительного дохода, служащего своеобразной ценой за принятие дополнительного риска. Здесь прослеживается явная аналогия с обычным понятием нормы замещения одного блага другим, широко используемым в экономической теории. В параграфе 1 описаны необходимые предварительные сведения о предпочтениях на множестве вероятностных распределений и функционалах, представляющих предпочтения. В параграфе 2 описано понятие неприятия риска, и получено его значение для модели ожидаемой полезности. Это значение совпадает с классическим неприятием риска по Эрроу-Пратту [5,6]. Далее, в параграфе 3, исследовано аналогичное понятие для модели возмущенной вероятности [7].

1. Предпочтения на множестве вероятностных распределений

Пусть $\mathbf{F}$ - совокупность вероятностных распределений на некотором (конечном или бесконечном) интервале D вещественной оси $\mathbf{R}$. Распределения из $\mathbf{F}$ можно характеризовать функциями распределения, которые мы будем обозначать F, G, H, … Распределения из $\mathbf{F}$ могут представлять и случайные величины X, Y, Z, … имеющие указанные функции распределения. Мы будем использовать способ представления, наиболее удобный в каждом конкретном случае.

Пусть, далее, на $\mathbf{F}$ задано отношение предпочтения $\le$ (то есть, полное транзитивное отношение, см. [2]), которое содержательно трактуется следующим образом: запись $F \le G$ (или $X \le Y$, в терминах соответствующих случайных величин X, Y) означает, что распределение, представленное функцией распределения F (случайной величиной X) не более предпочтительно, чем распределение, представленное функцией распределения G (случайной величиной Y). Может оказаться, что одновременно выполнены соотношения $F \le G$ и $G \le F$. Это не означает совпадения распределений, а свидетельствует лишь об одинаковой предпочтительности различных (вообще говоря) распределений для лица, принимающего решения. В этом случае будем считать распределения эквивалентными, и обозначать этот факт $F \sim G$.

Известно [2], что введенное отношение эквивалентности разбивает $\mathbf{F}$ на классы эквивалентности, при некоторых естественных предположениях об отношении предпочтения $\le$, в каждом классе эквивалентности оказывается ровно одно вырожденное распределение (соответствующее детерминированному значению), и существует функционал $\mu : \mathbf{F} \to \mathbf{R}$, представляющий это отношение предпочтения в смысле

$$F \le G \quad \Leftrightarrow \quad \mu(F) \le \mu(G), \tag{1}$$

где правое неравенство понимается, как обычный порядок на множестве вещественных чисел. Функционал μ обычно называют мерой риска.

Возможен и противоположный путь установления взаимосвязи (1), который пока является превалирующим: сначала задается некоторый функционал $\mu : \mathbf{F} \to \mathbf{R}$, а по нему с помощью (1) порождается отношение предпочтения на множестве распределений $\mathbf{F}$. При этом функционал выбирается скорее их соображений удобства работы с ним, оставляя сложный вопрос выявления отношения предпочтения без должного внимания. С другой стороны, независимое изучение различных классов представляющих функционалов также важно, поскольку при наличии богатого запаса таких классов можно ожидать облегчения решения обратной задачи "от предпочтения к функционалу".

Упомянутая обратная задача уже решена в [4] для случая линейных отношений предпочтения. Представляющий функционал имеет вид ожидаемой полезности

$$\rho(F) = \rho(X) = \int_D U(x)dF(x) = \mathbf{E}U(X), \tag{2}$$

где X - случайная величина с функцией распределения F, а U - функция полезности лица, принимающего решения, которая, собственно говоря, и характеризует индивидуальные предпочтения. Из (2) ясно, что функционал ожидаемой полезности линеен относительно операции смеси вероятностных распределений, что, как уже упоминалось, не позволяет с его помощью строить хорошие приближения к реальным человеческим предпочтениям.

В настоящей работе рассматривается еще функционал возмущенной вероятности, введенный в [7] для вычисления страховой премии, и имеющий вид

$$\pi(F) = \int_0^1 \overline{F}^{-1}(v)dg(v), \tag{3}$$

где $\overline{F}$ обозначена дополнительная функция распределения $\overline{F}(x) = 1 - F(x), x \in D$, запись $\overline{F}^{-1}(\cdot)$ имеет смысл функции, обратной к $\overline{F}$, а $g:[0,1] \to [0,1]$ - возмущающая функция, являющаяся параметром функционала π, и обладающая следующими свойствами: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g не убывает на [0,1].

2. Неприятие риска

Неформально неприятие риска можно представлять, как нежелание индивидуума заменять детерминированную сумму денег случайным количеством с тем же математическим ожиданием. Обозначим W_a распределение из $\mathbf{F}$, вырожденное в точке $a \in D$, что в терминах случайной величины X с таким распределением можно записать в виде $\mathbf{P}(X = a) = 1$. Тогда неприятие риска можно определить следующим образом: индивидуум не приемлет риск, если его отношение предпочтения на $\mathbf{F}$ устроено таким образом, что среди всех распределений из $\mathbf{F}$, имеющих некоторое фиксированное математическое ожидание $a \in D$, наилучшим для него является W_a. Другими словами, $F \le W_a$, как только $\mathbf{E}F = a$, где $\mathbf{E}F$ обозначено математическое ожидание любой случайной величины, имеющей функцию распределения F.

Рассмотрим, что дает такое определение для случая модели ожидаемой полезности (2). Пусть индивидуум, не приемлющий риск, имеет некоторый начальный капитал $x \in D$, и пусть Δ - какая-либо случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда при любом $h > 0$ распределение случайной величины $x + h\Delta$ имеет математическое ожидание x, и является для индивидуума не более предпочтительным, чем W_x. В [1] показано, что выполнение этого условия при всевозможных случайных величинах Δ, обладающих указанными свойствами, и всевозможных положительных h эквивалентно *вогнутости* функции полезности U.

Теперь введем *количественную* характеристику для измерения *степени* неприятия риска. Рассмотрим следующий вопрос. Поскольку добавление случайной величины Δ к начальному капиталу x снижает предпочтительность результата, распределение $x + \Delta$ покидает класс эквивалентности, содержащий W_x. Однако, новый класс эквивалентности, в который попало распределение $x + h\Delta$, как и любой другой класс эквивалентности, содержит некоторое вырожденное распределение, например, W_{x-c}, где $c > 0$ можно истолковать, как плату, которую потребует индивидуум за добавление к своему капиталу случайной величины (риска) $h\Delta$. Размер этой платы, очевидно, зависит от h (равного стандартному отклонению "довеска" $h\Delta$). Каков *характер* этой зависимости $c = c(h)$? Этот характер можно использовать для измерения неприятия риска индивидуума: чем быстрее растет функция $c(h)$, тем большую плату требует индивидуум за ту же случайную добавку $h\Delta$, тем сильнее его неприятие риска. Такой подход был применен к модели ожидаемой полезности в [5,6]. В результате оказалось, что искомая зависимость имеет вид

$$c(h) = \frac{1}{2} h^2 \alpha \, , \tag{4}$$

где показатель

$$\alpha = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \tag{5}$$

назван абсолютным неприятием риска индивидуума. Видно, что для того, чтобы индивидуум был рациональным (предпочитал большие суммы доходов меньшим), необходимо, чтобы его функция полезности была возрастающей, в частности, $U'(x) > 0$ при всех $x \in D$. Из (4), (5) ясно также, что индивидуум не приемлет риск только в случае $U''(x) < 0$ при всех $x \in D$. Отметим, что последнее условие эквивалентно (строгой) вогнутости функции полезности U.

Теперь пойдем несколько дальше, и предположим, что сначала индивидуум обладал некоторым случайным количеством денег X, и рассматривается вопрос о цене $c(h)$, которую индивидуум потребует за замену X на $X + h\Delta$, где h и Δ имеют тот же смысл, что и раньше. Оказывается, что если случайные величины X и Δ *независимы*, то вывод получается сходным, а именно, $c(h)$ имеет вид (4), где показатель α следует вычислять по формуле

$$\alpha = -\frac{\mathbf{E}U''(X)}{\mathbf{E}U'(X)} \tag{6}$$

Таким образом, зависимость имеет вид $c(h) = ah^2$, где коэффициент пропорциональности a зависит от начального капитала (x или X) и предпочтений индивидуума (через функцию полезности U), но не зависит от веса добавки h.

Приведем здесь примеры зависимости $c(h)$. Пусть функция полезности является показательной: $U(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, $x \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Прямым дифференцированием нетрудно убедиться в том, что параметр α этой функции полезности в точности совпадает со значением, вычисленным по формулам (5) и (6), и, тем самым, обозначение является оправданным. В данной модели параметр функции полезности прямо описывает степень индивидуального неприятия риска. Если же функция полезности не является показательной, то вычисление неприятия риска оказывается не столь прямым. Например, для логарифмической функции полезности $U(x) = \ln(1 + \gamma x)$, $x \geq 0$, $\gamma > 0$, степень неприятия риска также определяется параметром γ, но имеет более сложный вид (4) с

$$\alpha = \frac{\gamma}{1 + \gamma x} = U'(x)$$

для модели с детерминированным начальным капиталом x, и

$$\alpha = \frac{\gamma^2 (b - a)}{(1 + \gamma a)(1 + \gamma b)[\ln(1 + \gamma b) - \ln(1 + \gamma a)]}$$

для модели со случайным начальным капиталом, имеющим равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b$.

3. Модель возмущенной вероятности

Теперь рассмотрим индивидуума, предпочтения которого описываются функционалом возмущенной вероятности (3). Нам потребуются следующие свойства функционала π: если X - случайная величина, а b - произвольная вещественная постоянная а $a \geq 0$, то $\pi(aX + b) = a\pi(X) + b$, в частности, $\pi(b) = b$.

Пусть начальный капитал индивидуума равен детерминированной величине x. Снова зададимся вопросом, какова норма замещения рискового довеска $h\Delta$. Имеем

$$\pi(x + h\Delta) = x + h\pi(\Delta), \qquad \pi(x - c) = x - c,$$

поэтому условие принадлежности $x + h\Delta$ и $x - c$ к одному классу эквивалентности приводит к уравнению $x + h\pi(\Delta) = x - c$, откуда

$$c = c(h) = -h\pi(\Delta). \tag{7}$$

Из (7) ясно, что индивидуум, предпочтения которого представляются функционалом возмущенной вероятности, не приемлет риск, если $\pi(\Delta) < 0$ для произвольной невырожденной случайной величины с нулевым средним. Как показано в [2], последнее условие в терминах возмущающей функции g имеет вид $g(v) \leq v$, $v \in [0,1]$. Представляя выражения (4), (7) в виде $c(h) = Kh$, видим, что в модели ожидаемой полезности коэффициент пропорциональности K зависит от добавляемого риска только через его стандартное отклонение h; форма распределения Δ в этом случае не играет роли. Это наблюдение наводит на мысль о наличии большого сходства между моделями Марковица и ожидаемой полезности. В последней плата за риск (хотя, в данном случае, лишь локально) определяется дисперсией добавляемого риска. Не так обстоит дело в случае функционала возмущенной вероятности. Здесь коэффициент пропорциональности K уже существенно зависит от формы добавляемого распределения, и эта зависимость не исчезает даже при сколь угодно малом размере добавляемого риска. Последнее обстоятельство связано с существенной нелинейностью функционала π, и может быть использовано для построения точного описания индивидуальных предпочтений.

Заключение

В работе рассмотрено понятие неприятия риска с точки зрения предельной нормы замещения добавленного риска и платы за него. В частном случае модели ожидаемой полезности это понятие совпадает с ранее существовавшим, являясь, тем самым, его обобщением.

Показано, что зависимость нормы замещения риска доходностью в нелинейной модели возмущенной вероятности существенно богаче, чем в линейной модели ожидаемой полезности. Этот факт позволяет надеяться на большую гибкость рассмотренного класса нелинейных мер риска при решении обратной задачи теории риска - аппроксимации представляющего функционала по частично известному отношению индивидуального предпочтения. Полезно также рассмотреть и другие классы нелинейных функционалов, в частности, обширный класс квантильных функционалов, связанных понятием Value at Risk.

Рассмотренное в данной работе понятие неприятия риска имеет локальный характер, и описывает индивидуальное отношение к риску только в окрестности некоторого (детерминированного или случайного) значения начального капитала. Представляет интерес и вычисление какого-либо глобального показателя такого рода; эта проблема будет рассмотрена отдельно.

Автор выражает признательность участникам ФАМ Семинара ИВМ СО РАН за творческую атмосферу и не утихающие дискуссии, способствовавшие развитию идей настоящей работы.

Литература

1. Де Гроот М. *Оптимальные статистические решения*. М.: Мир, 1974, 491 с.
2. Новоселов А.А. *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения*. Новосибирск: Наука, 2001, 102 с.
3. Cox L.A. *Risk Analysis: Foundations, Models, and Methods*. Kluwer, 2001, 568 p.
4. фон Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970, 708 с.
5. Arrow K.J. *Essays in the Risk-Bearing*. Chicago: Markham, 1971.
6. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32** (1964), 122-136.
7. Wang, S. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26** (1996), 71-92.