Понятие неприятия риска в различных моделях предпочтений

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики
Красноярск
arcady@novosyolov.com

Аннотация. *В работе рассматриваются способы измерения неприятия риска в некоторых моделях предпочтений. Устанавливается взаимосвязь между коэффициентом неприятия риска модели ожидаемой полезности, заданным уровнем доходности в задаче Марковица, а также детерминированным эквивалентом. Представлена идея способа измерения неприятия риска в модели когерентных мер риска.*

Ключевые слова. *Предпочтение, риск, ожидаемая полезность, критериальная плоскость, когерентная мера риска, генератор меры риска.*

1 Введение

Понятие неприятия риска, по-видимому, впервые возникло в работе [1] в рамках модели ожидаемой полезности [2], и получило дальнейшее развитие в книге [3]. В рамках модели показательной полезности в качестве измерителя неприятия риска выступает параметр модели α, см. (8).

В работе [4] рассматривалась модель предпочтений на критериальной плоскости риск-доходность, в рамках которой показателем неприятия риска в некоторой степени может служить параметр заданной доходности M, см. (2). В настоящей работе мы, в частности, устанавливаем связь между параметрами M, α при фиксированном нормальном распределении вектора доходностей X.

Распространение этого понятия с линейной модели ожидаемой полезности на нелинейные модели предпочтений было начато много позже в работе [5] и продолжено в [6].

Вопросы измерения неприятия риска поднимались также в работе [7].

В настоящей работе мы рассмотрим способы задания однопараметрических семейств предпочтений, в которых выбор подходящего предпочтения может быть произведен посредством единственного парного сравнения распределений.

В классической модели предпочтений (ожидаемой полезности) таким семейством является, например, семейство, представленное однопараметрическим семейством показательных функций полезности. В моделях возмущенной вероятности соответствующие семейства предпочтений задаются однопараметрическими семействами возмущающих функций [8].

В настоящей работе мы также предложим также способ задания однопараметрических семейств корегентных мер риска посредством их представления семействами вероятностных мер.

2 Классические модели

2.1 Предпочтение, его представление и неприятие риска

Предпочтением $\preceq$ на множестве $\mathbb{X}$ называют [9] полное транзитивное бинарное отношение на этом множестве. Принятие решений в условиях риска основано на отношении предпочтения, введенном на множестве случайных величин или функций распределения с конечным математическим ожиданием $EX, X \in \mathbb{X}$. Говорят [5], что такое отношение обладает свойством *неприятия риска*, если $X \preceq EX$ при всех $X \in \mathbb{X}$. Здесь использована распространенная вольность в обозначениях: EX обозначает не только соответствующее число, но и случайную величину (или ее распределение), с вероятностью 1 принимающую значение EX.

Отношение предпочтения $\preceq$ представляется [9] функционалом $h : \mathbb{X} \to R$, если выполняется

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow h(X) \le h(Y),\ X, Y \in \mathbb{X}.$$

2.2 Задача Марковица

В задаче Марковица отношение предпочтения является неполным, поскольку имеются несравнимые пары распределений. Однако, имеется интересная связь между решением задачи Марковица и теорией ожидаемой полезности, поэтому в данном разделе мы установим некоторые свойства этой задачи.

Рассмотрим случайный вектор X с вектором средних $m = \mathbf{E}X$ и ковариационной матрицей $C = \mathbf{E}(XX')$. Предполагая C невырожденной, обозначим

$$(x, y) = x'C^{-1}y, \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Олег Воробьев (ред.), Труды XIV ФАМЭМС'2015, Красноярск: СФУ

"энергетическое" скалярное произведение и соответствующую норму в R^n. С помощью вектора весов $y \in R^n$ формируется портфель $K = y'X$, средняя доходность которого равна $\mathbf{E}K = m'y$, а дисперсия равна $\mathbf{E}(K - m'y)^2 = y'Cy$. Для удобства будем называть эту конструкцию *нормальным портфелем.*

Обозначим I вектор из R^n, состоящий из единиц. Известная задача Марковица [4], [10] формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\, y'Cy \to \min_{y \in R^n}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$m'y = M, \tag{2}$$

$$I'y = 1. \tag{3}$$

Здесь M — заданная доходность портфеля, параметр задачи Марковица. Введем обозначение

$$B = \begin{pmatrix} m & I \end{pmatrix},\ \widetilde{M} = \begin{pmatrix} M & 1 \end{pmatrix}',$$

тогда пара ограничений (2) — (3) запишется в виде

$$B'y = \widetilde{M}. \tag{4}$$

Для удобства записи введем обозначения

$$D = B'C^{-1}B = \begin{pmatrix} \|m\|^2 & (m,I) \\ (m,I) & \|I\|^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = det(D) = \|m\|^2\|I\|^2 - (m,I)^2,$$

и вычислим

$$D^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \|I\|^2 & -(m,I) \\ -(m,I) & \|m\|^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Следующая лемма описывает некоторые свойства решения задачи Марковица

Лемма 1. *Решение задачи (1), (4) имеет вид*

$$y = C^{-1}BD^{-1}\widetilde{M},$$

а дисперсия распределения портфеля зависит от заданной доходности M следующим образом:

$$y'Cy = f(M) = \frac{\|I\|^2M^2 - 2(m,I)M + \|m\|^2}{\Delta}.$$

Наименьшее значение дисперсии

$$\sigma_*^2 = 1/\|I\|^2 \tag{6}$$

достигается при задании доходности

$$M_* = \frac{(m,I)}{\|I\|^2}. \tag{7}$$

При $z > 0$ уравнение

$$f'(M) = z$$

имеет решение

$$M = M_* + \frac{\Delta}{2\|I\|^2}\, z.$$

Доказательство. Решая задачу Марковица методом множителей Лагранжа, запишем ее лагранжиан с множителями Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$ в виде

$$L(y,\lambda) = \frac{1}{2}\, y'Cy - \lambda'(B'y - \widetilde{M}).$$

Необходимое условие экстремума $\nabla L_y(y,\lambda) = 0$ дает выражение

$$y = C^{-1}B\lambda,$$

подставляя которое в уравнение (4), получаем

$$B'C^{-1}B\lambda = D\lambda = \widetilde{M},$$

откуда

$$\lambda = D^{-1}\widetilde{M}$$

и

$$y = C^{-1}BD^{-1}\widetilde{M},$$

что и требовалось.

Вычисление дисперсии распределения портфеля непосредственно дает

$$\begin{aligned} y'Cy &= \widetilde{M}'D^{-1}B'C^{-1}CC^{-1}BD^{-1}\widetilde{M} \\ &= \widetilde{M}'D^{-1}B'C^{-1}BD^{-1}\widetilde{M} \\ &= \widetilde{M}'D^{-1}DD^{-1}\widetilde{M} \\ &= \widetilde{M}'D^{-1}\widetilde{M}, \end{aligned}$$

что, с учетом явного вида D^{-1} из (5), приводит, как и ожидалось, к выражению

$$f(M) = \frac{\|I\|^2M^2 - 2(m,I)M + \|m\|^2}{\Delta}.$$

Вычисляя производную f по M, легко приходим к последнему утверждению леммы. □

2.3 Ожидаемая полезность

В теории ожидаемой полезности предпочтение на множестве вещественных распределений порожлается функционалом

$$h(F) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dF(x),$$

где $U : R \to R$ — функция полезности. Нетрудно показать, что это предпочтение обладает свойством неприятия риска в том и только в том случае, когда функция U является вогнутой.

Теорема 1. *Предпочтение, порожденное функционалом ожидаемой полезности, обладает свойством неприятия риска тогда и только тогда, когда функция U является вогнутой.*

Доказательство. Пусть $\preceq$ обладает свойством неприятия риска, то есть,

$$h(F) \le h(EF), \quad F \in \mathbb{X},$$

где

$$EF = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x).$$

При $p \in [0,1]$ рассмотрим семейство функций распределения

$$F_{a,b,p}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1-p, & a \le x < b, \\ 1, & b \le x. \end{cases}$$

Для $F = F_{a,b,p}$ имеем

$$\begin{aligned} EF &= (1-p)a + pb, \\ EU(F) &= (1-p)U(a) + pU(b), \\ U(EF) &= U((1-p)a+pb), \end{aligned}$$

поэтому свойство неприятия риска

$$U(EF) \ge EU(F), \quad F \in \mathbb{X}$$

влечет

$$U((1-p)a+pb) \ge (1-p)U(a) + pU(b),$$

что и означает вогнутость U.

Пусть теперь U вогнута. Тогда использование классического неравенства Йенсена для математических ожиданий [11] дает

$$EU(F) \ge U(EF),$$

что и требовалось $\square$.

Далее произведем вычисление ожидаемой полезности случайной величины с известным нормальным распределением, при показательной функции полезности

$$U(x) = 1 - \exp(-\alpha x), \; -\infty < x < \infty, \tag{8}$$

которая является вогнутой при любом значении параметра $\alpha > 0$. График этой функции показан на рис. 1.

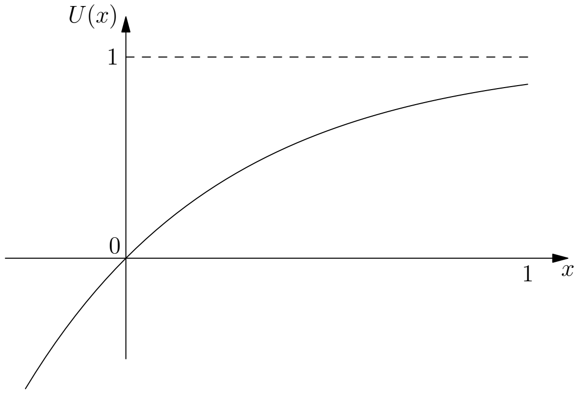

Рис. 1: Показательная функция полезности

Лемма 2. *Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение со средним μ, дисперсией σ^2 и плотностью распределения*

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty,$$

а функция полезности имеет вид (8). Тогда ожидаемая полезность X задается выражением

$$\mathbf{E}U(X) = 1 - \exp\left(-\alpha\left(\mu - \frac{\alpha\sigma^2}{2}\right)\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}U(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(-\alpha x))\, \varphi_{\mu,\sigma}(x)\, dx \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x)\, \varphi_{\mu,\sigma}(x)\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= 1 - \exp\left(-\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-(\mu-\alpha\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= 1 - \exp\left(-\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

2.4 Связь задачи Марковица и теории ожидаемой полезности

Оказывается, что если индивидуум обладает показательной функцией полезности с параметром α, то при фиксированном распределении компонент случайного вектора X из задачи Марковица, параметр M этой задачи может служить измерителем неприятия риска, и однозначно связан с параметром α. Эта связь устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Индивидуум с показательной функцией полезности $U = U_\alpha$ выберет нормальный портфель с показателями*

$$M_\alpha = M_* + \frac{\Delta}{\alpha\|I\|^2}, \;\; \sigma_\alpha^2 = \sigma_*^2 + \frac{\Delta}{\alpha^2\|I\|^2}.$$

Линия безразличия, проходящая через точку $(M_\alpha, \sigma_\alpha^2)$, описывается уравнением

$$\mu = \frac{1}{2\alpha\|I\|^2}\left[\|I\|^2\|m\|^2 - (\alpha - (m,I))^2\right] + \frac{\alpha}{2}\sigma^2. \tag{9}$$

Замечание 1. *Значение постоянной*

$$\mu_{ce} = \frac{1}{2\alpha\|I\|^2}\left[\|I\|^2\|m\|^2 - (\alpha - (m,I))^2\right] \tag{10}$$

из (9), соответствующее значению $\sigma^2 = 0$, называется детерминированным эквивалентом точек, лежащих на данной линии безразличия.

Доказательство. Линии безразличия функции полезности на плоскости (μ, σ^2) представляют собой прямые с уравнением

$$\mu - \frac{\alpha\sigma^2}{2} = const,$$

тангенс угла наклона которых к оси μ равен $2/\alpha$. В экстремальной точке линия безразличия касается графика функции f, поэтому тангенс угла наклона совпадает с производной функции f по M в этой точке. Применяя лемму 1 с $z = 2/\alpha$, получаем

$$M_\alpha = M_* + \frac{\Delta}{2\|I\|^2} z = M_* + \frac{\Delta}{\alpha\|I\|^2} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^2 &= f(M_\alpha) = \frac{1}{\Delta}\left(\|I\|^2 M_\alpha^2 - 2(m, I)M_\alpha + \|m\|^2\right)\\ &= \frac{1}{\|I\|^2} + \frac{\Delta}{\alpha^2\|I\|^2} = \sigma_*^2 + \frac{\Delta}{\alpha^2\|I\|^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя координаты точки $(M_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ в общее уравнение линии безразличия, получаем требуемое уравнение с явным выражением для постоянной.□

Таким образом, при заданном распределении случайного вектора X параметры допустимой области задачи Марковица на критериальной плоскости вычисляются по формулам (6), (7), а уровень доходности портфеля, задаваемый индивидуумом с неприятием риска α, и соответствующий риск, представлены в выражениях (11), (12).

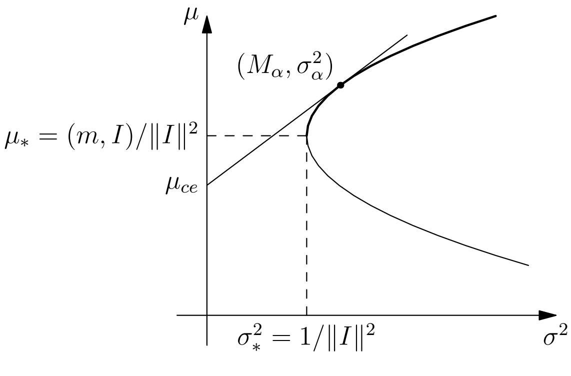

Рис. 2: Эффективная граница, экстремальная линия безразличия и детерминированный эквивалент решения в задаче Марковица

Отсюда вытекает, что и в задаче Марковица, при некоторых ограничениях на семейство допустимых распределений, удается измерять неприятие риска тем же способом, что и в случае ожидаемой полезности.

3 Современные модели предпочтений

3.1 Модель возмущенной вероятности

В этой модели сравнение двух распределений производится посредством функционала возмущенной вероятности [8] (известного также под названием емкости [12]), который функции распределения F на вещественной оси ставит в соответствие вещественное число

$$\begin{aligned}\pi_g(F) &= -\int_{-\infty}^{0} g\left(F(t)\right) dt + \int_0^\infty \left[1 - g(F(t))\right] dt\\ &= \int_0^1 F^{-1}(u)\, dg(u),\end{aligned}$$

где $g : [0,1] \to [0,1]$ — неубывающая возмущающая функция, удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 0,\ g(1) = 1.$$

Примерный график возмущающей функции показан на рис. 3.

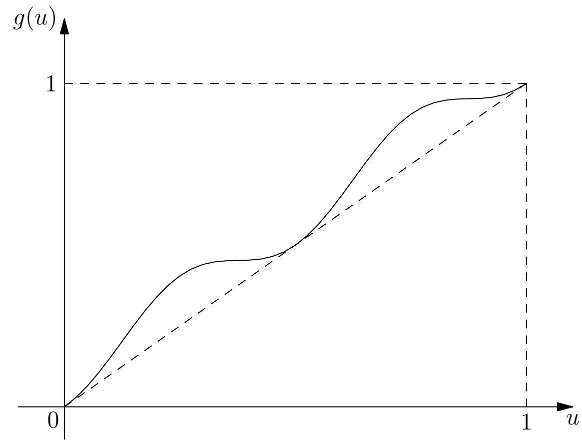

Рис. 3: Возмущающая функция

Покажем, что свойство неприятия риска для функционала π_g эквивалентно простому условию на функцию g.

Теорема 3. *Предпочтение, задаваемое функционалом π_g, обладает свойством неприятия риска тогда и только тогда, когда $g(u) \geq u$, $u \in [0,1]$.*

Доказательство. Пусть сначала предпочтение обладает свойством неприятия риска, то есть, для произвольного распределения $F \in \mathbb{X}$ выполнено соотношение $\pi_g(F) \leq \pi_g(EF)$. Нетрудно заметить, что для постоянной величины a справедливо $\pi_g(a) = a$, так что из предположения вытекает неравенство

$$\pi_g(F) - EF \leq 0, F \in \mathbb{X}.$$

Для $p \in [0,1]$ рассмотрим семейство функций распределения

$$F_p(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0, & x < 0,\\ 1-p, & 0 \leq x < 1,\\ 1, & 1 \leq x\end{array}\right. .$$

Имеем

$$F_p^{-1}(u) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & 0 \leq u < 1-p,\\ 1, & 1-p \leq u \leq 1,\end{array}\right.$$

так что $EF_p = p$ и

$$\pi_g(F_p) = \int_0^1 F_p^{-1}(u)\,dg(u) = 1 - g(1-p),$$

откуда

$$\pi_g(F_p) - EF_p = 1 - g(1-p) - p \le 0,$$

что эквивалентно $g(1-p) \ge (1-p)$, $p \in [0,1]$, что и требовалось.

Пусть теперь $g(u) \ge u,\ u \in [0,1]$. Обозначим $\Delta = \pi_g(F) - EF$. Учитывая известное равенство

$$EF = -\int_{-\infty}^0 F(t)\,dt + \int_0^\infty (1-F(t))\,dt,$$

имеем

$$\begin{aligned}\Delta &= -\int_{-\infty}^0 g(F(t))\,dt + \int_0^\infty [1-g(F(t))]\ dt \\ &+ \int_{-\infty}^0 F(t)\,dt - \int_0^\infty (1-F(t))\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty [g(F(t)) - F(t)]\,dt \le 0,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Многочисленные примеры однопараметрических семейств функционалов возмущенной вероятности приведены в [8]. Параметры этих семейств можно использовать для описания неприятия риска в соответствующем семействе.

3.2 Когерентные меры риска

Этот класс мер риска был введен в работе [13]. Мы не будем останавливаться здесь на детальном определении этого класса функционалов, напомним лишь, что каждый такой функционал можно задать посредством выпуклого семейства вероятностных мер $\mathcal{Q}$ в виде

$$f(X) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q X,\ X \in \mathbb{X}.$$

Задающее семейство будем называть *генератором* когерентной меры риска.

Качественно связь неприятия риска с формой и размером генератора $\mathcal{Q}$ можно описать следующим образом. Расширение генератора $\mathcal{Q}$ соответствует усилению неприятия риска. В крайнем состоянии, когда генератор $\mathcal{Q}$ совпадает с множеством всевозможных вероятностных мер $\mathcal{P}$ (треугольник на рисунке 4), получается сильнейшая степень неприятия риска; соответствующая когерентная мера риска имеет вид

$$f_{\mathcal{Q}}(X) = \mathrm{vrai}\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega).$$

Сужение генератора при сохранении в нем "истинной" вероятностной меры P соответствует ослаблению неприятия риска. В предельном случае одноточечного генератора $\mathcal{Q} = \{\mathcal{P}\}$ приходим к описанию риск-нейтрального индивидуума, для которого $f(X) = EX$.

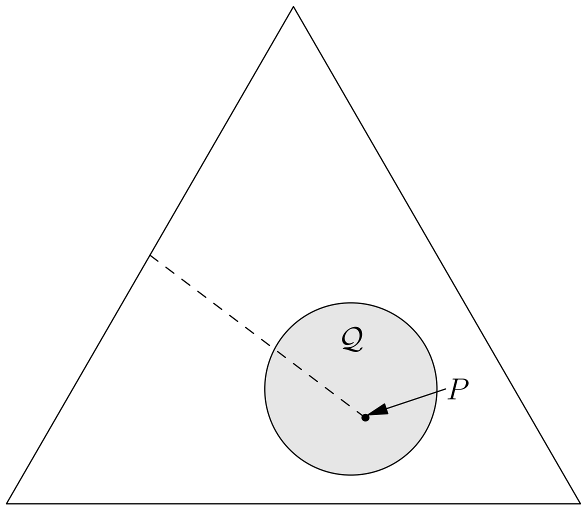

Рис. 4: Семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$

Представляет интерес построение однопараметрического семейства генераторов с тем, чтобы строить модели принятия решений посредством небольшого количества наблюдений и в случае когерентных мер риска. Эта проблема будет рассмотрена отдельно.

Список литературы

[1] J.D. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122–136, 1964.

[2] Дж. фон Нейман and О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение*. Наука, М., 1970.

[3] K.J. Arrow. *Essays in the risk-bearing*. Markham, Chicago, 1971.

[4] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.

[5] А.А. Новоселов. Неприятие риска: качественный подход и количественные оценки. *Автоматика и телемеханика*, 7:165–177, 2003.

[6] А.А. Новоселов. Измерение неприятия риска. *Труды X Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, СФУ, 2011*, 1:309–313, 2011.

[7] A.N. Balsa, N. Gandelman, and N. Gonzalez. Peer effects in risk aversion. *Risk Analysis*, 35(1):27–43, 2015.

[8] S. Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26:71–92, 1996.

[9] А.А. Новоселов. Представление предпочтений на множестве рисков вещественными функционалами. *Труды V Международной конференции по финансово-актуарной математике*, 1:151–165, 2006.

[10] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, New York, 1959.

[11] А.А. Боровков. *Теория вероятностей*. "Наука М., 1986.

[12] Denneberg D. *Non-Additive Measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, boston edition, 1994.

[13] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.