Измеримость случайного множества событий

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики
Красноярск
arcady@novosyolov.com

Аннотация. *В работе доказана безусловная измеримость случайного множества событий, вытекающая непосредственно из структуры этого случайного элемента безо всяких дополнительных условий и предположений.*
Ключевые слова. *Событие, множество событий, алгебра, измеримость, терраска.*

1 Введение

В работах О.Ю.Воробьева [1, 2, 3] изучался случайный элемент, называемый случайным множеством. В дальнейшем возникло эвентологическое направление [4], центральным объектом в котором стало специфическое случайное множество, а именно - случайное множество событий.

И абстрактное случайное множество, и случайное множество событий, будучи случайными элементами, обязаны обладать свойством измеримости. В настоящей работе показано, что случайное множество событий обладает свойством измеримости "по статусу", безо всяких дополнительных предположений.

Во втором разделе статьи вводятся основные понятия и определения, а в третьем разделе доказана основная теорема.

2 Случайные элементы и измеримость

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, U — произвольное множество, $\mathcal{A}$ — некоторая σ-алгебра его подмножеств (отметим, что в случае, когда U — конечное множество, можно ограничиться понятием алгебры подмножеств). Случайным элементом K на этом вероятностном пространстве со значениями в U называется отображение $K : \Omega \to U$, измеримое относительно пары σ-алгебр $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ в том смысле, что для всякого $A \in \mathcal{A}$ справедливо $K^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Для дальнейшего отметим, что измеримость относительно σ-алгебры на множестве значений является *монотонной по включению*, то есть, если две σ-алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ на U таковы, что $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, то измеримость K относительно пары σ-алгебр $(\mathcal{F}, \mathcal{A}_2)$ влечет измеримость относительно пары σ-алгебр $(\mathcal{F}, \mathcal{A}_1)$. В частности, самой сильной измеримостью является измеримость относительно пары σ-алгебр $(\mathcal{F}, 2^U)$.

Случайным конечным множеством называется случайный элемент, значения которого являются подмножествами некоторого конечного множества $\mathcal{X}$, то есть, элементы $2^{\mathcal{X}}$. Измеримость случайного конечного множества обычно требуется относительно полной алгебры подмножеств $2^{\mathcal{X}}$, которая естественно обозначается $2^{(2^{\mathcal{X}})}$.

Случайное конечное множество событий является частным случаем случайного конечного множества. Оно задается следующим образом. Фиксируется некоторый конечный набор событий $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$, и случайный элемент порождается соотношением

$$K(\omega) = \{x \in \mathcal{X} : \omega \in x\}. \tag{1}$$

Выражение (1) может быть истолковано, как "случайное множество наступивших событий", поскольку элементарному исходу эксперимента $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие некоторое подмножество событий $X \in \mathcal{X}$, точнее, совокупность всех событий, в которые входит данный исход эксперимента ω, другими словами, все те (и только те) события, которые наступили в данном испытании (эксперименте).

3 Основная теорема

Нам придется рассматривать события в двух различных пространствах событий: в σ-алгебре $\mathcal{F}$ и в алгебре $2^{2^{\mathcal{X}}}$. Для удобства различения этих понятий будем последние называть *гиперсобытиями.*

Теорема 1. *Случайное множество событий K является измеримым отображением из Ω в $2^{\mathcal{X}}$ относительно полной алгебры гиперсобытий $2^{2^{\mathcal{X}}}$ (и, следовательно, относительно любой алгебры подмножеств $2^{\mathcal{X}}$, см. монотонность измеримости по включению).*

Доказательство. Требуется показать, что прообраз любого элемента алгебры гиперсобытий $2^{2^{\mathcal{X}}}$ является элементом $\mathcal{F}$. Поскольку алгебра $2^{2^{\mathcal{X}}}$ конечна, любой ее элемент A является конечным объединением моноплетов из $2^{2^{\mathcal{X}}}$,

$$A = \sum_{X \in \Lambda} X, \tag{2}$$

Олег Воробьев (ред.), Труды XIII ФАМЭМС'2014, Красноярск: СФУ

где Λ — множество индексов, характеризующее гиперсобытие A. Например, гиперсобытие

$$A_0 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

представимо в виде суммы двух моноплетов

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\} + \{\{a, b\}\};$$

здесь $a, b \in \mathcal{F}$ — события в исходном вероятностном пространстве. Прообраз гиперсобытия A по определению является объединением прообразов своих элементов

$$K^{-1}(A) = \sum_{X \in \Lambda} K^{-1}(\{X\}) = \sum_{X \in \Lambda} K^{-1}(X),$$

например, для гиперсобытия A_0 получаем

$$\begin{aligned} K^{-1}(A_0) &= K^{-1}(\{\{a\}\}) + K^{-1}(\{\{a, b\}\}) \\ &= K^{-1}(\{a\}) + K^{-1}(\{a, b\}). \end{aligned}$$

Осталось отметить, что каждое выражение вида $K^{-1}(X)$ для $X \subseteq \mathcal{X}$ представляет собой терраску $ter(X//\mathcal{X})$, задаваемую подмножеством событий X под $\mathcal{X}$, а объединение таких террасок с необходимостью является элементом $\mathcal{F}$, что и требовалось.

4 Заключение

В работе показано, что случайное множество событий является измеримым отображением из пространства элементарных исходов в множество своих значений, поэтому необходимость в высказывании предположения измеримости этого случайного элемента при его определении отпадает.

Благодарности

Автор признателен Олегу Юрьевичу Воробьеву за многочисленные обсуждения проблем случайных множеств событий, а также Людмиле Юрьевне Шангареевой за вопросы, стимулировавшие размышления над проблемой измеримости случайных множеств событий.

Список литературы

[1] О. Ю. Воробьев. *Вероятностное множественное моделирование.* Наука, Новосибирск, 1978, 160с.

[2] О. Ю. Воробьев. *Среднемерное моделирование.* Наука, Москва, 1984, 133с.

[3] О. Ю. Воробьев. *Сет-суммирование.* Наука, Новосибирск, 1993, 137с.

[4] О. Ю. Воробьев. *Эвентология.* Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с., https://www.academia.edu/179393/Vorobyev_O.Yu._Eventology._-_Krasnoyarsk_Siberian_Federal_University._-_2007._-_435p.