

Стресс-тестирование риск-моделей: некоторые подводные камни

Аркадий Арсеньевич Новоселов

Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики
Красноярск
arcady@novosyolov.com

Аннотация. В работе описан метод стресс-тестирования риск-моделей и указана одна проблема, с которой можно столкнуться при построении стрессовых сценариев описанным методом. Предлагается способ решения указанной проблемы.

Ключевые слова. Риск, модель, условное распределение, стресс-тест, сценарий.

1 Введение

Управление финансовым риском имеет давнюю историю, и на интуитивном уровне применялось, по-видимому, еще в древнем мире, во времена зарождения торговых отношений. В двадцатом веке эта деятельность стала приобретать формализованный характер, активно привлекая математические методы. Так возникла теория портфельного управления Марковица, сначала в виде статьи [1], а потом - и в виде систематического изложения в книге [2]. Далее это теория была развита в части включения в портфель безрисковых инструментов Тобиным [3], и доведена Шарпом до теории взаимодействия с рынком в целом в [4].

С повышением изменчивости поведения инструментов финансового рынка росла и потребность в специализированных инструментах управления риском. Так, в 1970-х годах широкое использование так называемые производные инструменты: опционы, фьючерсы, форварды, а также многие другие. Математическая теория таких инструментов была заложена Блэком, Шоулзом и Мертоном в работах [5, 6], и с тех пор стремительно развивалась, см. например последнее издание книги Халла [7].

В последние десятилетия финансовые кризисы приобрели более выраженную форму. Так в 1997-1998 годах произошли азиатский кризис и российский дефолт, в 2000-2001 годах наблюдалось лопание интернет-пузыря, в 2008-2009 году имел место мировой финансовый кризис. Обеспечение устойчивости финансовой системы фирмы, компании или хедж-фонда в таких условиях требует проведения специальных мероприятий. Одним из таких комплексов мероприятий стала методология стресс-тестирования, основные принципы которой были

сформулированы в 1998 году в работе [8], и получили развитие далее в статьях [9, 10, 11] и многих других.

2 Распределение факторов и разбиение

Рассмотрим методологию стресс-тестирования, предложенную в [8]. Обозначим $X = (X_1, \dots, X_n)'$ вектор факторов, имеющих нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $C = \mathbf{E}(XX')$, а $w = (w_1, \dots, w_n)'$ — вектор весов. Из этих объектов образуется портфель по правилу $U = w'X$. Вектор весов предполагается ненулевым, других ограничений не накладывается. Другими словами, в портфель могут входить как длинные (положительные веса), так и короткие (отрицательные веса) позиции. Доходность портфеля, очевидно, равна нулю, дисперсия и стандартное отклонение задаются выражениями $w'Cw$, $\sigma(X) = \sqrt{w'Cw}$.

Множество индексов $\{1, \dots, n\}$ разбивается на два подмножества I, K таким образом, чтобы в множество индексов I попадали номера факторов, подверженных стрессу, а в множество K — номера факторов, которые изменяются в соответствии со связями, задаваемыми исходным распределением случайного вектора X . Для удобства записи блоков векторов и матриц будем считать, что при некотором m эти подмножества имеют вид¹ $I = \{1, \dots, m\}$ и $K = \{m + 1, \dots, n\}$. Тогда вектор X разбивается на $X = (X'_I, X'_K)'$ с $X_I = (X_1, \dots, X_m)'$ и $X_K = (X_{m+1}, \dots, X_n)'$, а ковариационная матрица представляется в блочном виде

$$C = \begin{pmatrix} C_{II} & C_{IK} \\ C_{KI} & C_{KK} \end{pmatrix},$$

с очевидным составом блоков, причем $C_{IK} = C'_{KI}$.

3 Условное распределение

Зафиксируем значения компонент подвектора $X_I = a = (a_1, \dots, a_m)$. Известно [8], что условное распределение оставшихся факторов X_K при этом условии

¹Для реализации расчетного алгоритма такое упорядочение несущественно, факторы можно оставлять на своих местах.

является нормальным, со средним

$$\mu(a) = \mathbf{E}(X_K | X_I = a) = C_{KI} C_{II}^{-1} a \quad (1)$$

и ковариационной матрицей

$$C(a) = C_{KK} - C_{KI} C_{II}^{-1} C_{IK}. \quad (2)$$

Отметим, что корреляционная структура условного распределения не зависит от размера стресса a , а зависит лишь от способа разбиения факторов на фиксированные (возмущаемые) I и "свободные" K .

Результат стресса может быть записан для ожидаемых значений факторов в виде $\begin{pmatrix} a \\ \mu(a) \end{pmatrix}$, а также в виде доверительных интервалов уровня α , ширина которых равна нулю для факторов с номерами из I ; для факторов с номерами из K стандартные отклонения τ_k , $k = 1, \dots, n - m$ равны квадратным корням из диагональных элементов матрицы $C(a)$, а доверительные интервалы уровня доверия α имеют границы $\mu_k(a) \pm q_{(1+\alpha)/2} \tau_k$, $k = 1, \dots, n - m$, где квантиль q заданного уровня определен в (??).

4 Интуитивное представление о реакции на стресс

Интуитивно ясно, что при положительной корреляции двух факторов положительный стресс одного из них вызовет положительную среднюю реакцию другого, а при отрицательной корреляции знак средней реакции будет противоположен знаку стресса. Эта связь проиллюстрирована на рисунках 1 и 2.

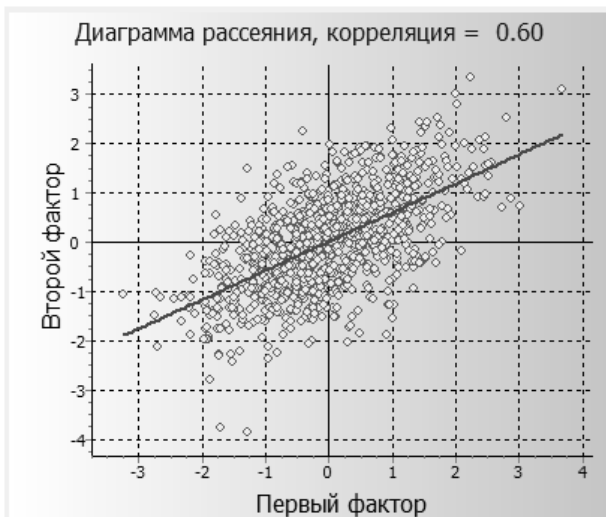


Рис. 1: Диаграмма рассеяния двумерного нормального распределения при коэффициенте корреляции 0.6 и равных стандартных отклонениях; линия регрессии второго фактора на первый $x_2 = 0.6 \cdot x_1$.

На рисунке 1 показана диаграмма рассеяния двумерного нормального распределения с коэффициентом

корреляции компонент (факторов) 0.6, а также линия регрессии второго фактора на первый, которая имеет в данном случае уравнение $x_2 = 0.6 \cdot x_1$. Шоку первого фактора величины a соответствует в среднем шок второго фактора величины $0.6 \cdot a$.

На рисунке 2 представлена аналогичная картина для случая отрицательной корреляции между факторами. Видно, что в данном случае шок первого фактора величины a вызывает среднюю реакцию второго фактора, по величине равную $-0.8 \cdot a$.

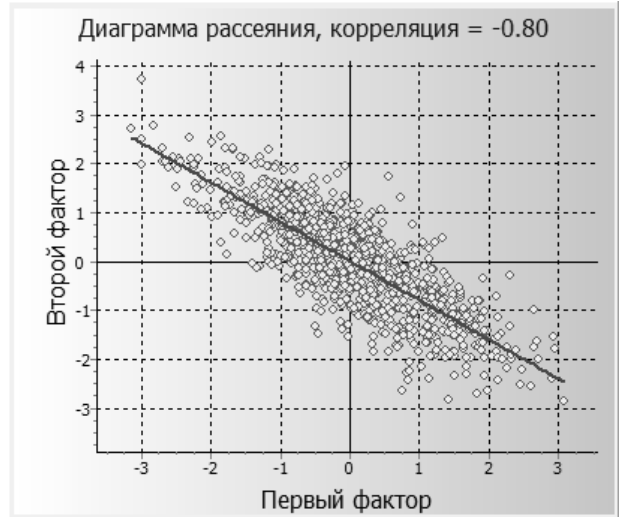


Рис. 2: Диаграмма рассеяния двумерного нормального распределения при коэффициенте корреляции -0.8 и равных стандартных отклонениях; линия регрессии второго фактора на первый $x_2 = -0.8 \cdot x_1$.

5 Примеры контринтуитивного поведения

Рассмотрим трехфакторную модель ($n = 3$) с ковариационной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 170 & -50 & -6 \\ -50 & 25 & 5 \\ -6 & 5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

и соответствующей корреляционной матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0.77 & -0.38 \\ -0.77 & 1 & 0.82 \\ -0.38 & 0.82 & 1 \end{pmatrix}$$

и матрицей стандартных отклонений

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 13.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.22 \end{pmatrix},$$

так что, в частности, $C = \Lambda K \Lambda$. Для удобства описания снабдим факторы фиктивными наименованиями, например, "энергетика", "медиа" и "золото".

Подвергнем стрессу фактор "золото", задав ему значение -2. Среднее значение реакции первых двух факторов, в соответствии с (1), приведено в табл. 1. Как и ожидалось, отрицательно коррелированный с "золотом" фактор "энергетика" реагирует в среднем в противоположную (положительную) сторону, а положительно коррелированный фактор "медиа" - в ту же (отрицательную) сторону.

Таблица 1: Пример стресс-теста с возмущением фактора "золото"

Фактор	Значение
Энергетика	8
Медиа	-6.67
Золото	-2

Теперь подвергнем стрессу -2 фактор "медиа". Результат показан в табл. 2. Здесь знаки реакции также соответствуют ожиданиям, основанным на знаке корреляции.

Таблица 2: Пример стресс-теста с возмущением фактора "медиа"

Фактор	Значение
Энергетика	4
Медиа	-2
Золото	-0.4

Наконец, подвергнем одновременно стрессу -2 два фактора, "медиа" и "золото". Среднее значение первого фактора, приведенное в табл., оказывается также отрицательным, несмотря на отрицательное значение корреляции этого фактора с каждым из стрессовых факторов.

Таблица 3: Пример стресс-теста с возмущением факторов "медиа" и "золото"

Фактор	Значение
Энергетика	-8.8
Медиа	-2
Золото	-2

Это неожиданное явление объясняется следующим образом. Средняя реакция на шок соответствует (в условиях симметричных распределений) наиболее вероятной ситуации (моде распределения). Значительные отклонения от такого наиболее вероятного поведения возможны, хотя и довольно маловероятны. Рассмотренный шок пары факторов, как видно из рисунка 3, лежит далеко от области наиболее вероятных значений этой пары факторов; поведение факторов в этой области плохо описывается средними характеристиками, что мы и увидели из примера. Наиболее вероятны значения этой пары факторов, в которых величина фактора "медиа" вчетверо превосходит величину фактора "золо-

то" (см. матрицу стандартных отклонений факторов Λ). Сложные многофакторные стрессовые сценарии имеет смысл подбирать с учетом рассмотренного обстоятельства, или пользоваться специализированными методами, разрабатываемыми в рамках обратного стресс-тестирования [11].

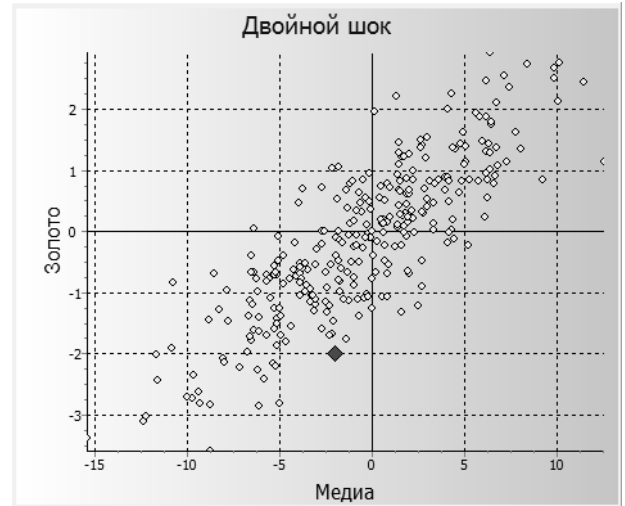


Рис. 3: Диаграмма рассеяния распределения пары факторов "медиа-золото"; двойной шок (ромб).

Список литературы

- [1] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
- [2] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [3] J. Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25:65–86, 1958.
- [4] W. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19:425–442, 1964.
- [5] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [6] R. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29:449–470, 1974.
- [7] J. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives, 8th ed.* Pearson, 2011.
- [8] P. Kupiec. Stress testing in a value at risk framework. *The Journal of Derivatives*, 6:7–24, 1998.
- [9] A. Novosyolov and D. Satchkov. Portfolio crash testing: making sense of extreme event exposures. *Journal of Risk Model Validation*, 4:53–67, 2010.
- [10] А.А. Новоселов. Моделирование роста корреляций для стресс-тестирования. *Риск-менеджмент в кредитной организации*, 3 (1):92–103, 2013.
- [11] Y. Kopeliovich, A. Novosyolov, D. Satchkov, and B. Schachter. Robust risk estimation and hedging: A reverse stress testing approach (submitted). *Journal of Derivatives*, 22:1–35, 2014.