Некоторые задачи управления пожарным риском

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе рассматриваются некоторые задачи управления пожарным риском в условиях ограниченных ресурсов, приводятся методы их решения, производится сравнение методов, даны результаты численных экспериментов, а также рекомендации по применению методов.*

Ключевые слова. *Риск, пожар, управление, оптимизация, динамическое программирование.*

1 Введение

Вопросам исследования пожарного риска посвящена обширная литература, см., напр., [3], а также библиографию в [4], [1]. В настоящей работе поставлены некоторые задачи оптимального управления риском возникновения пожара, а также предложены приближенные и точные методы решения этих задач. Работа построена следующим образом. Сначала в параграфе 2 вводятся необходимые понятия и описываются модели вероятности возникновения пожара, затем в параграфе 3 ставятся задачи управления вероятностью возникновения пожара и описываются методы их решения. В параграфе 4 приведены численные примеры решения задач управления.

2 Вероятность возникновения пожара

2.1 Общие соображения

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Для событий $x, y \in \mathcal{A}$ обозначим

$$c(x, y) = P(x \cap y) - P(x)P(y)$$

ковариацию этих событий. Далее, обозначим $F \in \mathcal{A}$ событие возникновения пожара, а $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ — множество событий, изображающих противопожарные мероприятия. Точнее, наступление события $x \in \mathcal{X}$ будем интерпретировать, как осуществление некоторого противопожарного мероприятия.

От противопожарных мероприятий $x \in \mathcal{X}$ естественно ожидать выполнения соотношений $P(F|x) < P(F)$, что эквивалентно отрицательности ковариации событий F, x. Поэтому будем считать выполненным предположение

$$c(F, x) < 0,\ x \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

Далее, для подмножества мероприятий $X \in \mathcal{X}$ обозначим

$$f(X) = P\left(F \left| \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \right.\right) \tag{2}$$

вероятность возникновения пожара при условии, что выполнены мероприятия из подмножества X. Здесь $x^c = \Omega \setminus x$ и $X^c = \mathcal{X} \setminus X$.

Поскольку мощность множества возможных противопожарных мероприятий $\mathcal{X}$ обычно исчисляется сотнями, непараметрическое оценивание функции f, заданной на множестве $2^{\mathcal{X}}$, не представляется возможным. Поэтому будем искать функцию f в более или менее узких параметрических классах функций. Предварительно сделаем некоторые естественные предположения общего характера.

Функцию f будем предполагать монотонной по включению:

$$X \subseteq Y \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow f(X) \geq f(Y). \tag{3}$$

Содержательно это означает, что расширение списка выполненных противопожарных мероприятий не повышает вероятность возникновения пожара.

Из (3) вытекает, что максимальное значение вероятности возникновения пожара соответствует пустому множеству мероприятий

$$q_M = \max_{X \subseteq \mathcal{X}} f(X) = f(\emptyset),$$

а минимальное значение этой вероятности — полному комплексу противопожарных мероприятий

$$q_m = \min_{X \subseteq \mathcal{X}} f(X) = f(\mathcal{X}).$$

Значения q_m, q_M также будем считать заданными.

2.2 Вероятность возникновения пожара; частные случаи

Мы будем искать функцию f в виде

$$f(X) = g(v(X)),\ X \subseteq \mathcal{X}, \tag{4}$$

Олег Воробьев (ред.), Труды XII ФАМЭБ'2013, Красноярск: СФУ

где g - невозрастающая функция эффективности v комплекса мероприятий:

$$g : [0,1] \to [q_m, q_M],$$

$$g(u) > g(v),\ q_m \le u < v \le q_M$$

и

$$g(0) = q_M,\ g(1) = q_m. \tag{5}$$

Вид функции эффективности $v : 2^{\mathcal{X}} \to [0,1]$ уточним позже.

Рассмотрим некоторые параметрические формы модели зависимости g вероятности пожара от эффективности мероприятий v.

1. Линейная модель $g(v) = a + bv$
2. Показательная модель $g(v) = a + b\exp(cv)$

Линейная модель зависит от двух параметров, которые однозначно определяются граничными условиями (5). Она имеет вид

$$\begin{aligned} g(v) &= q_M + (q_m - q_M)v \\ &= q_m v + q_M(1-v). \end{aligned} \tag{6}$$

В показательном классе имеется три параметра a, b, c, которые из условий (5) не могут быть определены однозначно. Некоторая свобода будет использована нами для вариации модели.

Показательная модель, с учетом граничных условий (5), имеет вид

$$g_a(v) = a + (q_M - a)\left(\frac{q_m - a}{q_M - a}\right)^v. \tag{7}$$

Эта модель корректна при $a < q_m$, и

$$\lim_{v\to\infty} g_a(v) = a.$$

Кроме того,

$$\lim_{a\to-\infty} g_a(v) = g(v),\ v \in [0,1],$$

то есть, показательная модель (7) при $a \to -\infty$ сходится к линейной модели (6), причем, сходимость равномерна на отрезке $[0,1]$. В частном случае $a = 0$ получаем

$$g_0(v) = q_M\left(\frac{q_m}{q_M}\right)^v. \tag{8}$$

Графики функций g и g_a при $a = -0.00001$ и $a = 0$ приведены на рис. 1.

Теперь введем функцию эффективности комплекса мероприятий $v : 2^{\mathcal{X}} \to [0,1]$. Будем считать ее аддитивной, так что

$$v(X) = \sum_{x\in X} v(x),$$

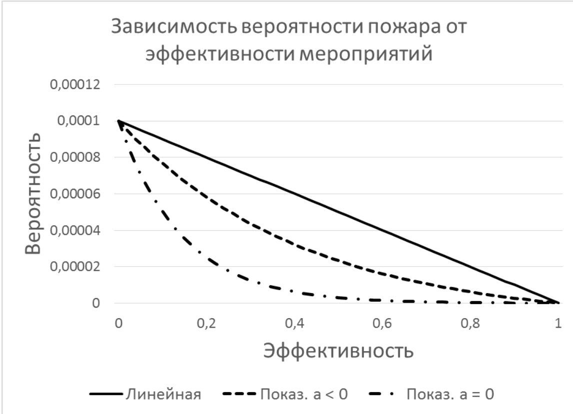

Рис. 1: Зависимость вероятности пожара от эффективности мероприятий v; линейная (6) и показательная (7) модели с $a = -0.00001$ и $a = 0$

где для простоты используется сокращенное обозначение $v(x) = v(\{x\})$, $x \in \mathcal{X}$, причем $v(\emptyset) = 0$ и $v(\{\mathcal{X}\}) = 1$. Для $x \in \mathcal{X}$ величину $v(x)$ можно интерпретировать, как эффективность мероприятия x. Ее можно задать экспертным способом, а можно оценить по наблюдениям за возникновением пожаров на реальных объектах. Теперь зависимость вероятности возникновения пожара от эффективности комплекса X противопожарных мероприятий можно описать линейной

$$\begin{aligned} f(X) &= q_M + (q_m - q_M)v(X) & (9) \\ &= q_m v(X) + q_M(1 - v(X)). & (10) \end{aligned}$$

и показательной

$$f_a(X) = a + (q_M - a)\left(\frac{q_m - a}{q_M - a}\right)^{v(X)} \tag{11}$$

моделями.

Показательная модель (11) представляет собой частный случай гиббсовской модели [Воробьев].

2.3 Затраты на проведение мероприятий

Противопожарные мероприятия требуют для своего осуществления некоторых затрат, что естественно учитывать при планировании комплекса противопожарных мероприятий. Обозначим u_x затраты на осуществление мероприятия $x \in \mathcal{X}$, и будем предполагать аддитивность затрат в составе комплекса, то есть затраты U_X на осуществление комплекса мероприятий $X \in \mathcal{X}$ выражаются в виде

$$U_X = \sum_{x\in X} u_x.$$

3 Многокритериальное управление

При управлении пожарной безопасностью, целевыми могут оказаться многие показатели, в частности, эффективность противопожарных мероприятий, выражающаяся в снижении условной вероятности возникновения пожара, а также затраты на осуществление мероприятий. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые постановки задач с использованием стандартных способов сведения многокритериальных задач к однокритериальным задачам с ограничениями.

3.1 Максимизация эффекта

Предположим, что осуществлен некоторый набор противопожарных мероприятий $Y \subseteq \mathcal{X}$, и имеется бюджет Z для осуществления дополнительных мероприятий. Рассмотрим задачу выбора дополнительного мероприятия $x \in Y^c$, максимизирующего изменение вероятности возникновения пожара

$$\begin{cases} f(Y) - f(Y + \{x\}) \to \max_{x \in Y^c} \\ u_x \le Z \end{cases}.$$

Ввиду (4), монотонности функции g и того факта, что Y фиксировано, эта задача эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} v(Y + \{x\}) \to \max_{x \in Y^c} \\ u_x \le Z \end{cases}. \tag{12}$$

Ввиду свойства аддитивности функции v такая задача легко преобразуется в форму

$$\begin{cases} v(x) \to \max_{x \in Y^c} \\ u_x \le Z \end{cases}. \tag{13}$$

Решение этой задачи сводится к элементарному перебору элементов Y^c.

Более общая постановка заключается в добавлении целого комплекса мероприятий $X \subseteq Y^c$ в рамках бюджета:

$$\begin{cases} f(Y) - f(Y + X) \to \max_{X \subseteq Y^c} \\ U_X \le Z \end{cases}.$$

Последняя задача, в свою очередь, эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} v(Y + X) \to \max_{X \subseteq Y^c} \\ U_X \le Z \end{cases} \tag{14}$$

и, далее, ввиду аддитивности v,

$$\begin{cases} v(X) \to \max_{X \subseteq Y^c} \\ U_X \le Z \end{cases} \tag{15}$$

Задача (15) есть, по существу, задача о рюкзаке [2], ее решение перебором всех подмножеств $X \subseteq Y^c$ потребует экспоненциальных временных затрат. Приближенное решение задачи (15) может быть получено последовательным применением решения простой задачи (13). Назовем такой алгоритм последовательным. Разновидность последовательного алгоритма, в котором мероприятия рассматриваются в порядке убывания эффективности, можно назвать "жадным". Оба алгоритма дают лишь приближенное решение задачи. Точное решение в случае целочисленных значений функций u, v дает метод динамического программирования (МДП). При относительно небольшом количестве различных значений метод динамического программирования дает выигрыш в эффективности по сравнению с методом полного перебора всех подмножеств. В случае вещественных значений u, v метод полного перебора является, по-видимому, единственным точным методом решения задачи (15).

3.2 Минимизация затрат

Рассмотрим в некотором смысле двойственную постановку задачи: минимизация затрат при условии достижении заданного уровня W эффективности мероприятий

$$\begin{cases} U_X \to \min_{X \subseteq Y^c} \\ v(X) \ge W \end{cases}. \tag{16}$$

Переходя к дополнению X в Y^c, то есть, к подмножеству $T = Y^c \setminus X$, можно переформулировать задачу (16) в форме

$$\begin{cases} U_T \to \min_{T \subseteq Y^c} \\ v(T) \le W \end{cases}. \tag{17}$$

Для решения последней задачи уже напрямую применимы те же методы, что и в случае задачи (15).

4 Численные примеры

Рассмотрим примеры решения задач управления тремя методами: последовательным, жадным и методом динамического программирования. Всюду без ограничения общности будем считать, что $Y = \emptyset$. Мероприятия в примерах будем обозначать номерами.

Пример 1. Рассмотрим совокупность из пяти мероприятий, обладающих эффективностью v и требующих для своего осуществления затрат u в соответствии с табл. 1.

Номер	Затраты u	Эффективность v
1	3	1
2	4	6
3	5	4
4	8	7
5	9	6

Таблица 1: Характеристики мероприятий в примере 1.

Решение задачи (15) при $Z = 13$ тремя методами приведено в табл. 2.

Как видим, жадный алгоритм в данном примере нашел точное решение задачи. Вообще говоря, такой эффект достигается далеко не всегда, в следующем

Метод	Состав	Затраты u	Эфф. v
Посл.	{1,2,3}	12	11
Жадный	{2,4}	12	13
МДП	{2,4}	12	13

Таблица 2: Решения в примере 1.

примере мы приллюстрируем это явление на более сложных задачах.

Пример 2.

Теперь рассмотрим решение серии однотипных задач. В каждой из задач серии затраты u и эффективность v представляют собой независимые реализации целочисленной случайной величины с равномерным распределением на сетке $1, 2, \ldots, 50$. В таблице 3 приведены средние значения отношения эффективностей в решении задач приближенными и точным (МДП) методами, при различных ограничениях Z на имеющиеся ресурсы. Точнее, обозначим N количество задач в серии (в примере мы используем серию из $N = 10000$ задач). Обозначим X_i множество добавляемых мероприятий в решении i-ой задачи методом динамического программирования, а X_{ia} - то же множество в решении задачи приближенным методом, $i = 1, \ldots, N$. При этом относительная эффективность решения i-ой задачи приближенным методом выражается отношением

$$r_i = \frac{v(X_{ia})}{v(X_i)}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а средняя относительная эффективность вычисляется в виде

$$r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i.$$

	Приближ. метод	
Ресурсы	Посл.	Жадный
13	0.445	0.717
130	0.308	0.545
1300	0.656	0.945

Таблица 3: Относительная эффективность решений в примере 2.

В табл. 4 приведена средняя мощность множества добавляемых мероприятий X в решении каждым из методов

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |X_i|, \quad m_a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |X_{ia}|.$$

5 Заключение

В работе рассмотрены некоторые задачи управления риском возникновения пожара посредством выбора комплекса противопожарных средств в условиях ограниченных ресурсов. Предложены приближенные и точные методы решения этих задач, проведено сравнение методов, приведены численные иллюстрации.

	Мощность X_a		Мощность X
Ресурсы	Посл.	Жадный	МДП
13	3.03	3.05	5.17
130	7.64	7.63	18.70
1300	53.29	53.25	63.12

Таблица 4: Средняя мощность решений в примере 2.

Проведенные эксперименты позволяют заключить, что метод динамического программирования, дающий точное решение целочисленных задач управления, обеспечивает решение за приемлемое время, поэтому его можно использовать для решения практических задач посредством техники квантования.

Благодарности

Автор выражает свою искреннюю признательность Олегу Юрьевичу Воробьеву и Сергею Петровичу Амельчугову за многочисленные обсуждения проблематики управления пожарной безопасностью.

Список литературы

[1] А.А. Новоселов. *Математическое моделирование финансового риска: теория измерения.* Наука, Новосибирск, 2001.

[2] Х. Таха. *Введение в исследование операций.* Вильямс, М., 2005.

[3] А.А. Новоселов. *Управление пожарным риском в естественных условиях и на технических объектах*, volume 1. 2012.

[4] О.Ю. Воробьев. Применимая эвентология безопасности: неокончательные итоги. *Труды XII Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, 1:105–115, 2013.

Some problems of fire risk control

Abstract. *The paper is devoted to fire risk control using restricted resources. We present methods of solution, compare different methods, describe numeric experiments, and make a few recommendations on using methods of control.*

Keywords. *Risk, fire, control, optimization, dynamic programming.*