Дележ риска между факторами и активами

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе рассматривается дележ показателя рискованности системы между составляющими ее элементами, внешними факторами, оказывающими влияние на поведение системы в условиях риска, а также двумерные дележи между элементами и факторами. Изложение ведется на примере финансового портфеля и факторных риск-моделей финансового рынка, однако, результаты работы могут быть легко перенесены на поведение сложных систем в других областях риск-менеджмента.*

Ключевые слова. *Риск, фактор, актив, риск-модель, ковариационная матрица, дележ риска, теорема Эйлера.*

1 Введение

Рискованность сложных систем описывается различными мерами (показателями) риска. На поведение таких систем в условиях риска оказывает влияние как состав самих систем, так и различные внешние факторы, которые включены в риск-модель, как показано на рис. 1.

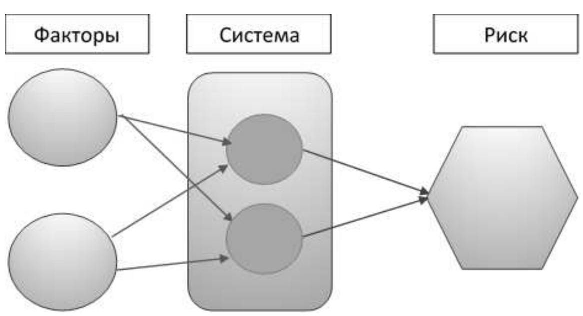

Рис. 1: Влияние состава системы и внешних факторов на риск системы.

Представляет интерес определение долей (вкладов) риска, которые имеет смысл приписать каждому элементу системы, или каждому фактору. Можно говорить также о доле риска, вкладываемой каждым фактором через посредство каждого элемента системы. Именно такое распределение вкладов в риск между элементами или факторами и называется в работе *дележом.*

Для определенности мы будем рассматривать риск-модели финансового портфеля, однако, принципиальные выводы справедливы и для других областей риск-менеджмента. В финансовых приложениях различают два типа риск-моделей: одноуровневые и двухуровневые. В одноуровневых моделях поведение системы описывается в терминах составляющих ее элементов, например, поведение финансового портфеля описывается в терминах активов, распределение которых задается непосредственно; факторы в модель не включаются. В двухуровневых моделях задается распределение факторов риска и функциональная зависимость элементов системы (активов портфеля) от факторов. Мы рассмотрим дележ риска в моделях этих двух типов раздельно.

Рискованность портфеля финансовых активов в финансовой индустрии принято измерять такими показателями, как tracking error (стандартное отклонение доходности портфеля), Value-at-Risk [8] (VaR, квантиль распределения доходности портфеля заданного уровня), Conditional Value-at-Risk [9] (CVaR, средние потери при условии превышения VaR; известен также под названием Expected tail loss, ETL) [4]. Более сложные меры риска ([2]), ([3]), ([5]), ([6]) пока используются чрезвычайно редко.

Для типичных распределений все эти показатели связаны со стандартным отклонением простыми масштабными преобразованиями. Например, для нормального распределения VaR уровня α, обозначаемый v_α, и стандартное отклонение σ связаны соотношением

$$v_\alpha = \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \tag{1}$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения, а Φ^{-1} — обратная к Φ функция. Переход к значению c_α, CVaR уровня α, производится по одной из формул

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{\sigma}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\Phi^{-1}(\alpha))^2\right) \qquad (2)\\ &= \frac{\sigma}{1-\alpha}\,\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right), \qquad (3)\end{aligned}$$

где φ — плотность стандартного нормального распределения.

Олег Воробьев (ред.), Труды XII ФАМЭБ'2013, Красноярск: СФУ

Для других типичных распределений, например, Стьюдента, эллиптических распределений, известны формулы перехода, аналогичные (1), (2), (3).

Поэтому в контексте работы нам достаточно изучать дележи стандартного отклонения портфеля; аналогичные дележи VaR и CVaR отличаются добавлением соответствующего масштабного коэффициента в каждый элемент разложения.

Работа построена следующим образом. В параграфе 2 описана теорема Эйлера, лежащая в основе всех дележей. Параграф 3 посвящен дележу риска в одноуровневых моделях, предложенному в [7]. В параграфе 4 представлены несколько новых дележей в двухуровневых линейных риск-моделях. В заключении подведены некоторые итоги.

2 Теорема Эйлера

Основой для дележей служит классическая теорема Эйлера о положительно однородных функциях [1]. Функция нескольких вещественных переменных $f : R^n \to R$ называется положительно однородной, если $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ для произвольных x их области определения f и произвольного $\lambda \in R$. Теорема Эйлера утверждает, что если положительно однородная функция дифференцируема на R^n, то справедливо разложение (дележ)

$$f(x) = x' \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{4}$$

где x' обозначает вектор-строку, полученную транспонированием столбца x, а ∇ обозначает градиент функции.

3 Дележ стандартного отклонения в одноуровневых моделях

3.1 Дележ

Обозначим $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ случайный вектор доходностей активов, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $C = \mathbf{E}XX'$. Далее, обозначим $w = (w_1, \ldots, w_n)'$ вектор весов, и составим из активов портфель

$$P = w'X.$$

Среднее значение доходности портфеля, очевидно, равно 0, а его дисперсия вычисляется по известной формуле

$$\mathbf{E}(P^2) = \mathbf{E}(w'XX'w) = w'Cw,$$

так что стандартное отклонение доходности портфеля, лежащее в основе вычисления всех показателей риска, равно

$$\sigma = f(w) = \sqrt{w'Cw}. \tag{5}$$

Дележ для (5) был предложен в [7].

Функция f, очевидно, является положительно однородной функцией w, поэтому к ней применима теорема Эйлера. Градиент f по w имеет вид

$$\nabla f = \frac{Cw}{\sqrt{w'Cw}},$$

а его j-я компонента, производная по w_j, равна

$$\frac{\partial f}{\partial w_j} = \frac{C_{j\cdot}w}{\sqrt{w'Cw}}, j = 1, \ldots, n,$$

где $C_{j\cdot}$ обозначает j-ю строку матрицы C.

Таким образом, j-я компонента дележа стандартного отклонения (ее еще называют маргинальным стандартным отклонением) равна

$$U_j = w_j \frac{\partial f}{\partial w_j} = \frac{w_j C_{j\cdot}w}{\sqrt{w'Cw}}, j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

а сам дележ приобретает вид

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} U_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_j C_{j\cdot}w}{\sqrt{w'Cw}}. \tag{7}$$

3.2 Простые случаи

Рассмотрим частные случаи. Пусть сначала только один из весов отличен от 0, например,

$$w_1 \neq 0,\ w_2 = 0,\ \ldots,\ w_n = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$U_1 = \sigma, U_2 = 0, \ldots, U_n = 0.$$

Пусть теперь ковариационная матрица является диагональной, то есть $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\sigma(w) = \sqrt{c_{11}w_1^2 + \cdots + c_{nn}w_n^2},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_i} = \frac{c_{ii}w_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_{jj}w_j^2}},\ i = 1, \ldots, n,$$

и маргинальные стандартные отклонения приобретают вид

$$w_i \frac{\partial \sigma}{\partial w_i} = \frac{c_{ii}w_i^2}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_{jj}w_j^2}},\ i = 1, \ldots, n.$$

Как видно, в рассмотренных примерах маргинальные стандартные отклонения неотрицательны. Это, однако, не является незыблемым правилом, в чем мы сейчас и убедимся.

3.3 Два актива

Для иллюстрации рассмотрим пример с двумя активами $n = 2$.

Пример 1. Пусть ковариационная матрица имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а вектор весов равен $w = (1, 3)'$. Тогда стандартное отклонение портфеля равно $\sigma = \sqrt{w'Cw} = \sqrt{7}$, а его составляющие имеют вид

$$U_1 = -\frac{1}{2\sqrt{7}},\ U_2 = \frac{15}{2\sqrt{7}}.$$

Как видим, несмотря на положительность весов обоих активов, маргинальный показатель риска для первого из них отрицателен. Содержательно это означает, что увеличение веса первого актива в портфеле должно приводить к снижению показателя риска портфеля. Прямое вычисление подтверждает это интуитивное предположение.

Пример 2. Рассмотрим более общую ситуацию с той же ковариационной матрицей (8), но с переменным весом первого актива,

$$w = (\beta, 1)',\ \beta \in [1, 3]. \tag{9}$$

Стандартное отклонение портфеля и маргинальные стандартные отклонения активов выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} \sigma(\beta) &= \sqrt{\beta^2 - 3\beta + 9}, \\ U_1(\beta) &= \frac{\beta^2 - \frac{3}{2}\beta}{\sqrt{\beta^2 - 3\beta + 9}}, \\ U_2(\beta) &= \frac{-\frac{3}{2}\beta + 9}{\sqrt{\beta^2 - 3\beta + 9}}, \end{aligned}$$

а графики этих функций приведены на рис. 2 — 4.

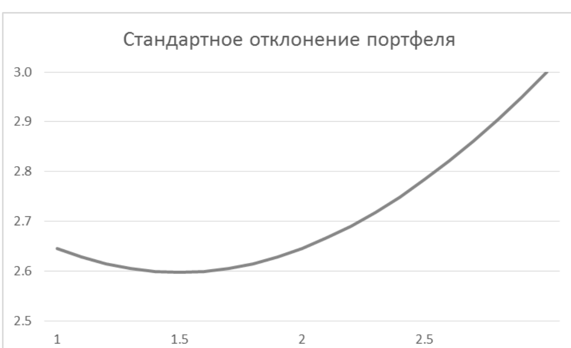

Рис. 2: Зависимость стандартного отклонения σ портфеля с параметрами (8), (9) от β.

При изменении значения β от 1 до 1.5 стандартное отклонение портфеля действительно уменьшается, достигая минимума $3\sqrt{3}/2$ при $\beta = 1.5$. Вес второго актива оставался в данном примере неизменным.

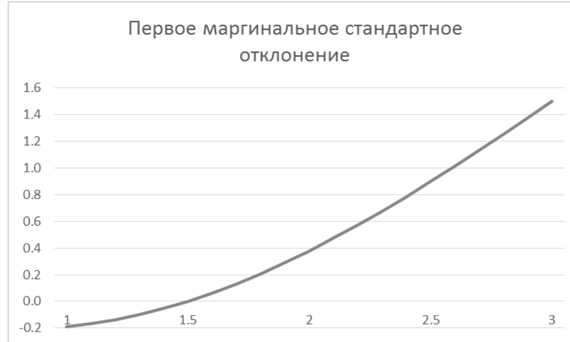

Рис. 3: Зависимость первой компоненты U_1 стандартного отклонения портфеля с параметрами (8), (9) от β.

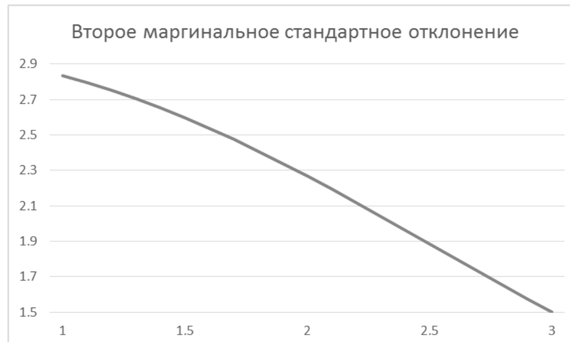

Рис. 4: Зависимость второй компоненты U_2 стандартного отклонения портфеля с параметрами (8), (9) от β.

Поскольку второе маргинальное отклонение положительно, следует ожидать увеличения стандартного отклонения портфеля при увеличении веса второго актива.

Пример 3. На рис. 5 — 7 показаны аналогичные зависимости стандартного отклонения портфеля и его маргинальных составляющих в случае более общей ковариационной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

при различных значениях $\rho = -0.5, 0, 0.5$ и вектора весов

$$w = (\beta, 3)',\ \beta \in [-1, 1]. \tag{11}$$

4 Дележи стандартного отклонения в двухуровневых моделях

4.1 Описание модели

Рассмотрим двухуровневую факторную риск-модель следующего вида. Имеется n факторов риска, представляющих собой случайный вектор

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{12}$$

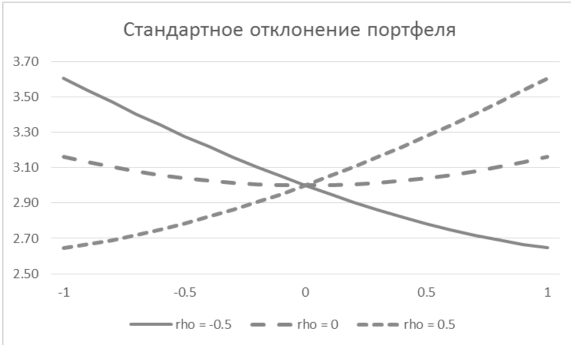

Рис. 5: Зависимость стандартного отклонения σ портфеля с параметрами (10), (11) от β.

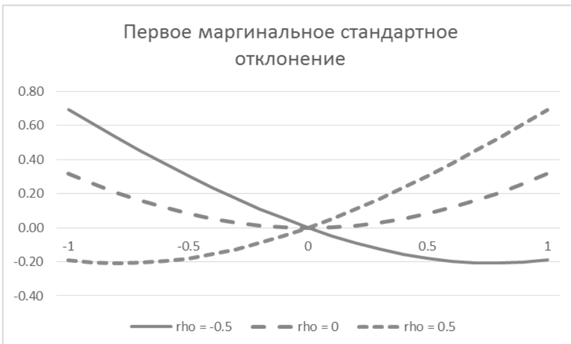

Рис. 6: Зависимость первого маргинального стандартного отклонения U_1 портфеля с параметрами (10), (11) от β.

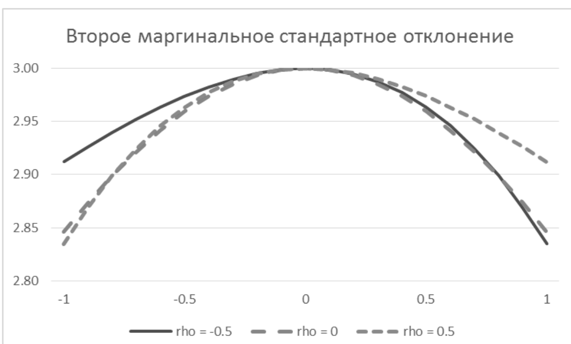

Рис. 7: Зависимость второго маргинального стандартного отклонения U_2 портфеля с параметрами (10), (11) от β.

с нормальным распределением с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$C = \mathbf{E}XX' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Рыночные активы $A = (A_1, \ldots, A_m)$ выражаются через факторы риска посредством линейных функций

$$A = HX + R, \qquad (14)$$

где H — матрица нагрузок размера $m \times n$, а R — случайный вектор остатков, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и диагональной ковариационной матрицей

$$G = \mathbf{E}RR' = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Предполагается, что факторы X и остатки R независимы.

Активы, очевидно, имеют нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$D = \mathbf{E}AA' = \mathbf{E}\left((HX+R)(HX+R)'\right) = HCH' + G.$$

Из активов составлен портфель

$$P = w'A \qquad (16)$$

с весами $w = (w_1, \ldots, w_m)'$. Вводя обозначение

$$W = H'w, \qquad (17)$$

получаем выражение для портфеля через факторы

$$P = w'(HX + R) = W'X + w'R$$

Среднее значение портфеля равно 0, а его дисперсия вычисляется следующим образом

$$\mathbf{E}PP' = \mathbf{E}w'AA'w = w'(HCH' + G)w.$$

Таким образом, стандартное отклонение портфеля имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{w'(HCH'+G)w} && (18) \\ &= \sqrt{W'CW + w'Gw} && (19) \\ &= \sqrt{w'Dw}. && (20) \end{aligned}$$

Здесь представляет интерес дележ стандартного отклонения портфеля по активам $A_1, \ldots, A_m$ и по факторам $X_1, \ldots, X_n$. Кроме того, следует иметь в виду, что в данной модели кроме компонент X имеется также дополнительный фактор риска, представленный случайным вектором R; его необходимо учитывать в дележе по факторам. Присвоим этому последнему фактору номер $n+1$. Наша задача состоит в вычислении чисел U_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n+1$ таких, что

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} U_{ij}. \qquad (21)$$

Кроме того, представляет интерес вывод дележей отдельно по факторам V_j, $j = 1, \ldots, n+1$ и активам T_i, $i = 1, \ldots, m$ таких, что

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n+1} V_j \qquad (22)$$

и

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} T_i. \qquad (23)$$

В идеальном варианте дележи (21) и (22), (23) должны быть согласованы в смысле

$$V_j = \sum_{i=1}^{m} U_{ij},\ j = 1, \ldots, n+1 \qquad (24)$$

и

$$T_i = \sum_{j=1}^{n+1} U_{ij},\ i = 1, \ldots, m. \qquad (25)$$

В настоящем параграфе рассмотрим несколько дележей, удовлетворяющих всем условиям, или только их части.

4.2 Наивный дележ риска

Можно поступить довольно просто и назначить величины вкладов всех факторов через все активы одинаковыми:

$$U_{ij} = \frac{\sigma}{m(n+1)},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n+1. \qquad (26)$$

Этот дележ удовлетворяет условиям согласования (21), (24), (25), однако, смысла в нем нет, и использование его для каких-либо целей проблематично. В последующих параграфах мы займемся поиском дележей риска, несущих в себе смысловую нагрузку вкладов факторов (активов) в риск портфеля.

4.3 Первый дележ риска

Первый из дележей строится следующим образом. Сначала вычисляется дележ σ по активам в соответствии с теоремой Эйлера

$$T_i = \frac{w_i D_i . w}{\sigma},\ i = 1, \ldots, m, \qquad (27)$$

так что выполнено (23). Затем вклады факторов в эти доли активов выделяются пропорционально нагрузкам и стандартным отклонениям факторов

$$U_{ij} = \frac{h_{ij}\sqrt{c_{jj}}}{k_i} T_i,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \qquad (28)$$

$$U_{i,n+1} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{k_i} T_i,\ i = 1, \ldots, m, \qquad (29)$$

где нормирующие множители k_i, $i = 1, \ldots, n$ подбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение (25), то есть,

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\sqrt{c_{jj}} + \sqrt{g_{ii}},\ i = 1, \ldots, m. \qquad (30)$$

Далее вклады факторов можно определить посредством (24), при этом автоматически будет выполнено соотношение (22).

Недостатком такого подхода является тот факт, что на втором этапе, в формулах (28) — (30), не учитывается корреляционная структура распределения факторов, что в некоторых приложениях оказывается недопустимым.

Пример 4. Рассмотрим пример такого дележа риска. Пусть $m = 3$, $n = 2$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.7 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad (33)$$

Стандартное отклонение портфеля σ равно 2.7749, а результаты его дележа, матрица U и векторы T, V, представлены в табл. 1.

	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0680	0.1700	0.2845	0.5225
A_2	0.7890	-2.7615	2.4951	0.5225
A_3	0.4678	0.3743	0.8877	1.7298
V	1.3249	-2.2172	3.6673	2.7749

Таблица 1: Дележ риска по факторам и активам, первый метод.

В этом дележе вклады факторов определяются довольно произвольным образом. В следующем дележе этот недостаток будет устранен, и вклады факторов будут определяться в соответствии с чувствительностью σ к изменению веса фактора.

4.4 Второй дележ риска

Дифференцируя (19) по компонентам W, получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial W_j} = \frac{C_j . W}{\sigma},$$

поэтому справедливо разложение по факторам

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n+1} V_j, \qquad (34)$$

где

$$V_j = W_j \frac{\partial \sigma}{\partial W_j} = \frac{W_j C_j . W}{\sigma},\ j = 1, \ldots, n \qquad (35)$$

и

$$V_{n+1} = \frac{w' G w}{\sigma}. \qquad (36)$$

Далее, используя (17) и (20), выразим компоненты дележа $V_1, \dots, V_{n+1}$ через веса активов w:

$$V_j = (H_{\cdot j})' w \frac{C_{j\cdot} H' w}{\sqrt{w' D w}} = w' H_{\cdot j} \frac{C_{j\cdot} H' w}{\sqrt{w' D w}}$$
$$= \frac{w' S^{(j)} w}{\sqrt{w' D w}}, \ j = 1, \dots, n \qquad (37)$$

где введено обозначение

$$S^{(j)} = H_{\cdot j} C_{j\cdot} H', \ j = 1, \dots, n$$

и

$$V_{n+1} = \frac{w' G w}{\sqrt{w' D w}}. \qquad (38)$$

Очевидно, все компоненты $V_1, \dots, V_n, V_{n+1}$ являются положительно однородными функциями w, поэтому к каждой из них можно применить теорему Эйлера. В результате имеем

$$\frac{\partial V_j}{\partial w_i} = \frac{2 S^{(j)}_{i\cdot} w \sqrt{w' D w} - w' S(j) w \frac{D_{i\cdot} w}{\sqrt{w' D w}}}{w' D w}$$
$$= \frac{2 S^{(j)}_{i\cdot} w (w' D w) - (w' S^{(j)} w) D_{i\cdot} w}{(w' D w)^{3/2}}$$

и

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial w_i} = \frac{2 G_{i\cdot} w \sqrt{w' D w} - w' G w \frac{D_{i\cdot} w}{\sqrt{w' D w}}}{w' D w}$$
$$= \frac{2 (G_{i\cdot} w)(w' D w) - (w' G w)(D_{i\cdot} w)}{(w' D w)^{3/2}}$$

при всех $j = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, m$, так что

$$U_{ij} = w_i \frac{2 (S^{(j)}_{i\cdot} w)(w' D w) - (w' S^{(j)} w)(D_{i\cdot} w)}{(w' D w)^{3/2}} \qquad (39)$$

для $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$, и

$$U_{i,n+1} = w_i \frac{2 (G_{i\cdot} w)(w' D w) - (w' G w)(D_{i\cdot} w)}{(w' D w)^{3/2}} \qquad (40)$$

для всех $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что в этом дележе вклады факторов (35), (36) уже определяются на основании чувствительности риска портфеля к изменению соответствующих факторов.

Пример 5. Рассмотрим пример с параметрами (31) — (33) из примера 4. Здесь вклады факторов, приведенные в табл. 2, определяются в соответствии с чувствительностью σ к весу соответствующих факторов.

Однако, у этого способа распределения есть другой недостаток, который проявляется при рассмотрении немного отличного примера.

Пример 6. Пусть параметры модели имеют те же значения (31) — (33) с единственным изменением элемента h_{32} в матрице нагрузок:

	X_1	X_2	R	T
A_1	0	0.3370	0.1856	0.5225
A_2	0	0.5532	-0.0307	0.5225
A_3	0	0.1910	1.5388	1.7298
V	0	1.0811	1.6938	2.7749

Таблица 2: Дележ риска по факторам и активам, второй метод.

$$H = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.7 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (41)$$

Дележ риска представлен в табл. 3.

	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0344	0.2216	0.2076	0.4636
A_2	-0.0880	0.3551	0.0653	0.3323
A_3	0.2177	-0.2321	1.6556	1.6462
V	0.1641	0.3447	1.9284	2.4372

Таблица 3: Дележ риска по факторам и активам, второй метод, один из элементов H равен 0.

Здесь вклад второго фактора через третий актив оказывается отрицательным, хотя нагрузка третьего актива на второй фактор, h_{32}, равна 0. Это обстоятельство может показаться противоречащим интуиции. Поэтому имеет смысл ввести еще один метод дележа риска, в котором вклады факторов через активы, имеющие нулевые нагрузки на соответствующий фактор, равны нулю.

4.5 Третий дележ риска

Для вывода третьего дележа введем переменные

$$z_{ij} = w_i h_{ij}, \ \ i = 1, \dots, m, \ \ j = 1, \dots, n. \qquad (42)$$

Обозначим Q диагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены веса w:

$$Q = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица Z с элементами (42) имеет вид

$$Z = QH.$$

Обозначим $I = (1, 1, \dots, 1)'$ вектор размера $m \times 1$, состоящий из единиц. С учетом очевидного равенства $w = Q' I$ из (18) получаем

$$\sigma = \sqrt{w'(HCH' + G) w} = \sqrt{I' Q H C H' Q' I + w' G w}.$$

Используя произвольную факторизацию C вида $C = LL'$, например, разложение Холецкого, получаем далее

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{I'QHLL'H'Q'I + w'Gw} \\ &= \sqrt{I'ZLL'Z'I + w'Gw}, \qquad (43) \\ &= \sqrt{BB' + w'Gw}, \qquad (44)\end{aligned}$$

где использовано обозначение $B = I'ZL$. Из (43) видно, что σ является положительно однородной функцией набора переменных (Z, w), поэтому можно применить теорему Эйлера.

Дифференцируя B по z_{ij} при фиксированных значениях индексов, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial z_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{m} z_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^{m} z_{kn} \right) L \\ &= e_j' L = L_{j\cdot},\end{aligned}$$

где e_j обозначен j-й орт пространства $\mathbf{R}^n$. Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial BB'}{\partial z_{ij}} &= \frac{\partial B}{\partial z_{ij}} B' + B \frac{\partial B'}{\partial z_{ij}} \\ &= L_{j\cdot} B' + B (L_{j\cdot})' = 2B(L_{j\cdot})' \\ &= 2I'ZL(L_{j\cdot})' = 2I'ZC_{\cdot j} = 2C_{j\cdot} Z'I\end{aligned}$$

для всех $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. Теперь из (44) вытекает

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z_{ij}} = \frac{C_{j\cdot} Z'I}{\sigma}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial w_i} = \frac{G_{i\cdot} w}{\sigma}$$

при всех $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$.

Для удобства записи обозначим $S = CZ'I$ столбец с компонентами $S = (s_1, \dots, s_n)'$. Окончательно первые n столбцов матрицы дележа U вычисляются по формуле

$$U_{ij} = \frac{w_i h_{ij} s_j}{\sigma},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

а последний, $(n+1)$-й, столбец - по формуле

$$U_{i,n+1} = \frac{g_{ii} w_i^2}{\sigma},\ i = 1, \dots, m.$$

Пример 7. Рассмотрим дележ стандартного отклонения в модели с параметрами из примера 5. Этот дележ представлен в табл. 4.

Пример 8. Дележ стандартного отклонения в модели с параметрами из примера 6 представлен в табл. 5. Как видим, вклад второго фактора через третий актив в этом дележе равен 0, согласуясь с нулевым значением соответствующей нагрузки.

Для удобства сравнения методов в табл. 6, 7 приведены дележи всеми методами для моделей примеров 4, 6.

	X_1	X_2	R	T
A_1	0	0.2703	0.2523	0.5225
A_2	0	0.3784	0.1441	0.5225
A_3	0	0.4324	1.2973	1.7298
V	0	1.0811	1.6938	2.7749

Таблица 4: Дележ риска по факторам и активам, третий метод.

	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0328	0.1436	0.2872	0.4636
A_2	-0.0328	0.2010	0.1641	0.3323
A_3	0.1641	0	1.4771	1.6412
V	0.1641	0.3447	1.9284	2.4372

Таблица 5: Дележ риска по факторам и активам, третий метод, один из элементов H равен 0.

Из табл. 6 видим, что первый дележ, использовавший распределение по факторам без учета чувствительности к изменению весов факторов, приводит к существенно отличным результатам.

Результаты второго и третьего дележей отличаются не очень значительно. Здесь обращает на себя внимание тот факт, что при втором дележе вклад фактора X_2 осуществляется через актив A_3 в наименьшей степени, а при третьем дележе, напротив, в наибольшей степени.

	Первый дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0680	0.1700	0.2845	0.5225
A_2	0.7890	-2.7615	2.4951	0.5225
A_3	0.4678	0.3743	0.8877	1.7298
V	1.3249	-2.2172	3.6673	2.7749
	Второй дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0	0.3370	0.1856	0.5225
A_2	0	0.5532	-0.0307	0.5225
A_3	0	0.1910	1.5388	1.7298
V	0	1.0811	1.6938	2.7749
	Третий дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0	0.2703	0.2523	0.5225
A_2	0	0.3784	0.1441	0.5225
A_3	0	0.4324	1.2973	1.7298
V	0	1.0811	1.6938	2.7749

Таблица 6: Дележ риска по факторам и активам, модель (31) — (33)

Из табл. 7 видим, что и в модели (31), (32), (41) первый дележ дает существенно отличные результаты, в частности, при дележе риска между факторами (вектор V). Второй и третий дележ дают сопоставимые результаты, при выборе между этими дележами можно руководствоваться дополнительными соображениями.

	Первый дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0603	0.1505	0.2524	0.4636
A_2	0.5018	-1.7564	1.5869	0.3323
A_3	0.5665	0	1.0748	1.6412
V	1.1286	-1.6055	2.9141	2.4372
	Второй дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0344	0.2216	0.2076	0.4636
A_2	-0.0880	0.3551	0.0653	0.3323
A_3	0.2177	-0.2321	1.6556	1.6462
V	0.1641	0.3447	1.9284	2.4372
	Третий дележ			
	X_1	X_2	R	T
A_1	0.0328	0.1436	0.2872	0.4636
A_2	-0.0328	0.2010	0.1641	0.3323
A_3	0.1641	0	1.4771	1.6412
V	0.1641	0.3447	1.9284	2.4372

Таблица 7: Дележ риска по факторам и активам, модель (31), (32), (41)

5 Заключение

В работе предложены три способа двухуровнего дележа риска портфеля между факторами и активами. Первый из них частично опирается на теорему Эйлера о разложении положительно однородной функции, а второй и третий используют эту теорему в полной мере.

Выбор способа дележа в каждом конкретном случае, по-видимому, следует производить с учетом задач, решаемых при управлении портфелем, а также текущих условий функционирования. Немалую роль в выборе может сыграть и интуиция риск-менеджера, выработанная им при использовании различных способов дележа.

Стоит также отметить, что перечень способов дележа не исчерпывается приведенными методами. Среди решений уравнений (18), (24), (25) могут найтись и другие дележи, для которых векторы T и V сами являются дележами риска в соответствуюших одноуровневых моделях, и обладающие различными дополнительными привлекательными свойствами.

Благодарности

Автор выражает свою искреннюю признательность Д.С. Сачкову за многочисленные обсуждения методики дележа, результатом которых стали описанные в работе двухуровневые варианты дележа показателей риска.

Список литературы

[1] А.Д. Мышкис. *Лекции по высшей математике.* Наука, М., 1973.

[2] А.А. Новоселов. *Математическое моделирование финансового риска: теория измерения.* Наука, Новосибирск, 2001.

[3] А.А. Новоселов. Обобщенные когерентные меры риска. *Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, 1:325–339, 2005.

[4] C. Acerbi and D. Tasche. Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, 31:379–388, 2002.

[5] Delbaen F. Eber J.-M. Artzner, P. and Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.

[6] H. Follmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6:429–447, 2002.

[7] M. B. Garman. Taking var to pieces. *Risk Magazine*, 10:70–71, 1997.

[8] G. Holton. *Value-at-Risk: Theory and Practice.* Academic Press.

[9] R.T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, 2:21–41, 2000.

Risk sharing among factors and assets

Abstract. *The paper is devoted to sharing a system risk among elements of the system and exterior factors, which influence the system behavior under risk. Two-way sharing between elements and factors is also considered. For the sake of clarity the system is represented by a financial portfolio governed by a factor risk-model of financial market. Similar results are also true for complex systems behavior in other branches of risk management.*

Keywords. *Risk, factor, asset, risk-model, covariance matrix, risk sharing, Euler theorem.*