Измерение неприятия риска

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Сибирский федеральный университет
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе определяются естественные отношения предпочтения на множестве рисков и изучается понятие неприятия риска в рамках этой модели. Доказана теорема о представлении естественного отношения предпочтения вещественными функционалами, и приведен один метод количественного представления неприятия риска.*

Ключевые слова. *Риск, принятие решений, естественное предпочтение, неприятие риска.*

1 Введение

Понятие неприятия риска рассматривалось в [1], [2], [3] в рамках модели ожидаемой полезности [4].

Более общее понятие неприятия риска было определено и изучалось в [5] в модели возмущенной вероятности.

2 Основные понятия

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{X}$ — совокупность случайных величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, обладающих конечными моментами до некоторого порядка p включительно, $1 \le p \le \infty$. Элементы $X \in \mathcal{X}$, в соответствии со сложившейся традицией [6], [7], будем называть *рисками.* В частности, произвольный риск $X \in \mathcal{X}$ обладает конечным математическим ожиданием.

Мы не будем различать случайные величины, совпадающие почти наверное. Для оформления этого утверждения случайные величины X, Y назовем эквивалентными: $X \sim Y$, если $\mathbf{P}(X \ne Y) = 0$, и будем считать уже выполненной стандартную процедуру перехода к фактор-множеству, для которого сохраним обозначение $\mathcal{X}$. На $\mathcal{X}$ можно определить норму

$$\|X\| = \left(\int_\Omega |X|^p(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \right)^{1/p}$$

и следующий естественный порядок

$$X \le Y \iff \mathbf{P}\left(\omega : \ X(\omega) \le Y(\omega)\right) = 1.$$

Введем специальное обозначение I для тождественной единицы:

$$I(\omega) = 1, \ \omega \in \Omega.$$

Риски вида aI при вещественных a имеют вырожденные распределения, поэтому будем называть их вырожденными (или детерминированными) рисками.

Далее, обозначим $\mathcal{X}_0$ совокупность рисков с нулевым средним:

$$\mathcal{X}_0 = \{X \in \mathcal{X} : \ \mathbf{E}X = 0\}.$$

Отношением предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется полное транзитивное бинарное отношение. Его симметричная часть представляет собой отношение *эквивалентности*

$$X \sim Y \iff X \preceq Y, \ Y \preceq X,$$

для которого сохраним стандартное обозначение, а несимметричная часть — отношение *строгого предпочтения*

$$X \prec Y \iff X \preceq Y, \ Y \not\preceq X.$$

Верхним классом $U(X)$ риска X по отношению предпочтения $\preceq$ называется множество

$$U(X) = \{Y \in \mathcal{X} : \ X \preceq Y\}.$$

Аналогично определяется нижний класс

$$L(X) = \{Y \in \mathcal{X} : \ Y \preceq X\}.$$

Пересечение этих двух классов задает класс эквивалентности риска X:

$$U(X) \cap L(X) = \{Y \in \mathcal{X} : \ Y \sim X\},$$

который будем обозначать $K(X)$.

Отношение эквивалентности $\sim$, как обычно, порождает разбиение $\mathcal{X}$ на классы эквивалентности, совокупность которых называют фактор-множеством $\mathcal{X}/\sim$. Здесь K можно считать отображением из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}/\sim$, которое каждому риску X ставит в соответствие его класс эквивалентности $K(X)$. Будем называть отображение K *разбивающим.*

Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется *конечным*, если в $\mathcal{X}$ нет "бесконечно хороших" или "бесконечно плохих" рисков, то есть, для каждого $Y \in \mathcal{X}$ в верхнем и нижнем классах $U(Y), L(Y)$ имеются вырожденные риски.

Отношение предпочтения называется *монотонным*, если

$$X \le Y \Longrightarrow X \preceq Y.$$

Монотонное предпочтение называется *строго монотонным*, если

$$\mathbf{P}(X < Y) = 1 \Longrightarrow X \prec Y.$$

Отметим, что для строго монотонного предпочтения справедливо $aI \prec bI$ при $a < b$.

Монотонное отношение предпочтения $\preceq$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $Y \in \mathcal{X}$, если для произвольного счетного семейства рисков $A \subseteq U(Y)$ выполняется $\inf_{X \in A} X \in U(Y)$.

Аналогично, монотонное отношение предпочтения $\preceq$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $Y \in \mathcal{X}$, если для произвольного счетного семейства рисков $A \in L(Y)$ выполняется $\sup_{X \in A} X \in L(Y)$.

Будем называть *непрерывным* отношение предпочтения на $\mathcal{X}$, являющееся одновременно полунепрерывным сверху и снизу в каждой точке $Y \in \mathcal{X}$.

Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется ненасыщенным, если для любых $X, Y \in \mathcal{X}$ найдутся постоянные $c < d$ такие, что

$$X + cI \prec Y \prec X + dI.$$

Определение 1 *Непрерывное конечное строго монотонное ненасыщенное отношение предпочтения называется естественным.*

Множество приемлемых рисков $A_{\preceq}$ для заданного предпочтения $\preceq$ задается посредством

$$A_{\preceq} = \{X \in \mathcal{X} : \ 0 \preceq X\} = U(0).$$

Для монотонного предпочтения это множество, очевидно, включает неотрицательный ортант

$$C_+ = \{X \in \mathcal{X} : \ X \ge 0\} \subseteq A_{\preceq}.$$

Если же предпочтение строго монотонно, то отрицательный ортант

$$C_{--} = \{X \in \mathcal{X} : \ \mathbf{P}(\omega : \ X(\omega) < 0) = 1\}$$

не пересекается с $A_{\preceq}$:

$$C_{--} \cap A_{\preceq} = \emptyset.$$

Интересно следующее представление верхнего класса.

Теорема 1 *Пусть $\preceq$ — естественное предпочтение на $\mathcal{X}$. Тогда*

$$U(X) = \bigcup_{Y \in K(X)} (Y + C_+), \qquad (1)$$

где сложение множеств понимается по Минковскому.

Доказательство. Обозначим $\tilde{U}(X)$ правую часть (1). Пусть $Z \in \tilde{U}(X)$. Тогда при некоторых $Y \in K(X)$, $V \in C_+$ выполнено $Z = Y + V$. Поскольку $Y \le Z$, монотонность $\preceq$ влечет $X \sim Y \preceq Z$, в частности, $Z \in U(X)$. Таким образом, $\tilde{U}(X) \subseteq U(X)$.

Пусть теперь $Z \in U(X)$. Ввиду ненасыщенности $\preceq$ при некотором $c \ge 0$ имеем $Z - cI \preceq X$. Ввиду непрерывности $\preceq$ при некотором $0 \le d \le c$ получим $Y = Z - dI \in K(X)$ и $Z = Y + dI$, что означает $Z \in Y + C_+$ и, тем самым, $Y \in \tilde{U}(X)$. Теорема доказана. □

Отношение предпочтения будем называть *выпуклым*, если его верхние классы $U(X)$ представляют собой выпуклые множества при любом $X \in \mathcal{X}$.

3 Представление предпочтений

В работе [8] приведены теоремы о представлении предпочтений на множестве вероятностных распределений. Здесь мы приведем аналогичные результаты для предпочтений на множестве рисков - случайных величин.

Скажем, что вещественный функционал $f : \mathcal{X} \to R$ представляет $\preceq$, если

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow f(X) \le f(Y). \qquad (2)$$

Напомним [8], что наряду с f отношение $\preceq$ представляет и любой функционал g, связанный с f посредством строго возрастающей функции h в виде

$$g(X) = h(f(X)), \ X \in \mathcal{X}.$$

Таким образом, представляющий функционал, если он существует, заведомо не является единственным.

Теорема 2 *Пусть $\preceq$ — естественное предпочтение на $\mathcal{X}$. Тогда найдется вещественный функционал $f = f_{\preceq}$, представляющий это отношение предпочтения.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-множество $\mathcal{X}/\sim$ по отношению эквивалентности, порожденному $\preceq$. В силу естественности предпочтения в каждом классе имеется не более одной вырожденной случайной величины вида aI. Покажем, что один риск такого вида имеется в каждом классе эквивалентности.

Зафиксируем $Y \in \mathcal{X}$ и обозначим $A = \{a \in R : aI \in L(Y)\}$, $B = \{b \in R : \ bI \in U(Y)\}$. Ввиду конечности предпочтения множества A, B непусты. Более того, ввиду монотонности предпочтения имеем $a \le b$ при любых $a \in A, b \in B$. Кроме того, по непрерывности предпочтения, имеем $\sup A = \inf B$. Обозначим это общее значение c. Рассмотрим произвольную последовательность $a_n \in A$ такую, что $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. По полунепрерывности сверху имеем $\sup_n a_n I = cI \in L(Y)$. Аналогично, рассмотрим произвольную последовательность $b_n \in B$ такую, что $\lim_{n\to\infty} b_n = c$. По полунепрерывности снизу получаем $\inf_n b_n I = cI \in U(Y)$. Таким образом, $cI \in L(Y) \cap U(Y) = K(Y)$, так что класс эквивалентности $K(Y)$ содержит вырожденный риск cI.

Таким образом, каждый класс эквивалентости из $\mathcal{X}/\sim$ содержит единственный вырожденный риск вида cI, где $c = c_Z$ зависит от класса эквивалентности $Z \in \mathcal{X}/\sim$. Представляющий функционал можно записать в виде

$$f(X) = c_{K(X)},\ X \in \mathcal{X},$$

где K — разбивающее отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}/\sim$. Такой представляющий функционал будем называть *детерминированным эквивалентом* при предпочтении $\preceq$. Теорема доказана. □

Отметим, что детерминированный эквивалент f обладает свойством

$$f(cI) = c,\ c \in R.$$

Естественное предпочтение $\preceq$ назовем *положительно однородным*, если его детерминированный эквивалент f является положительно однородным, то есть

$$f(\lambda X) = \lambda f(X),\quad \lambda \geq 0,\ X \in \mathcal{X}.$$

4 Неприятие риска

Предпочтение описывает индивидуальное отношение к риску. Большинство индивидуумов характеризует неприятие риска. В настоящей работе мы дадим строгое определение этого понятия, а также предложим некоторые способы количественного измерения неприятия риска.

Определение 2 *Индивидуум, описываемый отношением предпочтения $\preceq$, не приемлет риск, если для произвольного $x \in R$ и произвольного $\Delta \in \mathcal{X}_0$, отличного от 0, выполняется соотношение*

$$xI + \Delta \prec xI. \tag{3}$$

Содержательно это означает, что добавление “чистого риска” Δ к детерминированному результату xI ухудшает качество результата (с точки зрения рассматриваемого индивидуума).

Отношение предпочтения называется *инвариантным относительно сдвигов* (коротко: инвариантным), если

$$X \preceq Y \Longrightarrow X + aI \preceq Y + aI,\ a \in R.$$

Ясно, что для инвариантного предпочтения определение можно дать в упрощенной форме: $\Delta \prec 0$ для произвольного $\Delta \in \mathcal{X}_0$, отличного от 0.

Верхние классы вырожденных рисков при инвариантном предпочтении имеют одинаковую форму, являясь сдвигами друг друга:

$$U(cI) = cI + U(0),\ c \in R.$$

Аналогичное утверждение имеет место и относительно нижних классов:

$$L(cI) = cI + L(0),\ c \in R.$$

Можно сказать, что индивидуум с инвариантным предпочтением имеет неприятие риска, не зависящее от начального капитала.

Если неприятие риска возрастает вместе с капиталом, то верхний класс вырожденных рисков сужается: при $a < b$ имеет место

$$U(bI) \subseteq (b-a)I + U(aI).$$

Индивидуум с таким отношением предпочтения может быть назван “жадным”, с ростом начального капитала он все меньше и меньше склонен рисковать. Противоположное поведение характеризуется расширением верхнего класса с ростом начального капитала:

$$U(bI) \supseteq (b-a)I + U(aI),\ a < b.$$

Такого индивидуума можно назвать “транжирой”.

Снабдим $\mathcal{X}$ какой-либо нормой $\|\cdot\|$ и обозначим

$$B = \{X \in \mathcal{X} :\ \|X\| \leq 1\}$$

единичный шар пространства $\mathcal{X}$. Будем считать норму $\|\cdot\|$ откалиброванной таким образом, что

$$\|I\| = 1. \tag{4}$$

Обозначим

$$B_0 = \mathcal{X}_0 \cap B$$

и для количественного измерения неприятия риска будем использовать следующую величину.

Определение 3 *Для заданного естественного предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ неприятием риска называется величина*

$$r(x) = \sup_{\Delta \in B_0} (f(xI) - f(xI + \Delta)),\ x \in R, \tag{5}$$

где f — детерминированный эквивалент, соответствующий $\preceq$.

Понятие неприятия риска допускает двойственное описание, представленное в следующей теореме.

Теорема 3 *Пусть $\preceq$ — естественное предпочтение с детерминированным эквивалентом f и системой верхних классов U. Тогда функция*

$$r_1(x) = x - \sup\{y :\ U(yI) \supseteq xI + B_0\},\ x \in R \tag{6}$$

совпадает с $r(\cdot)$ из (5).

Доказательство. Отметим, что (5) можно переписать в виде

$$r(x) = x - \inf_{\Delta \in B_0} f(xI + \Delta),\ x \in R \tag{7}$$

и покажем, что (7) эквивалентно (6). Для этого достаточно при каждом фиксированном $x \in R$ доказать равенство

$$\sup\{y:\ U(yI) \supseteq xI + B_0\} = \inf_{\Delta \in B_0} f(xI + \Delta), \tag{8}$$

Обозначим

$$A(x) = \{y:\ U(yI) \supseteq xI + B_0\}.$$

Для $y \in A(x)$, $\Delta \in B_0$ имеем $yI \preceq xI + \Delta$, другими словами, $y \le f(xI + \Delta)$, откуда

$$\sup A(x) \le \inf_{\Delta \in B_0} f(xI + \Delta). \tag{9}$$

С другой стороны, по определению $A(x)$, для любого $y' \notin A(x)$ найдется $\Delta' \in B_0$ такое, что $y'I \succ xI + \Delta$, то есть,

$$y' > f(xI + \Delta').$$

Поэтому неравенство в (9) обращается в равенство. Теорема доказана. □

Для инвариантного предпочтения неприятие риска не зависит от x и имеет вид

$$r = \sup_{\Delta \in B_0} |f(\Delta)|. \tag{10}$$

Установим следующую теорему.

Теорема 4 *Пусть $\preceq_1$ и $\preceq_2$ — два естественных отношения предпочтения на $\mathcal{X}$, а U_1, U_2 и r_1, r_2 — соответствующие верхние классы и функции неприятия риска, заданные посредством (5). Предположим, что верхние классы удовлетворяют условиям $U_1(xI) \subseteq U_2(xI)$, $x \in R$. Тогда функции неприятия риска связаны неравенствами*

$$r_1(x) \ge r_2(x),\ x \in R. \tag{11}$$

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно вытекает из представления неприятия риска, описанного в теореме 3. □

Отметим, что для естественного предпочтения наименьшим возможным верхним классом произвольного риска $X \in \mathcal{X}$ является конус $X + C_+$ (такое отношение предпочтения автоматически является инвариантным). По теореме 4 такое отношение предпочтения обладает максимальным неприятием риска.

В качестве примера можно привести нормы пространств L^p, $1 \le p \le \infty$ а именно,

$$\|X\|_p = \left(\mathbf{E}|X|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

и[1]

$$\|X\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Эти нормы удовлетворяют условию калибровки (4).

Обозначим $B^{(p)}$ единичный шар в пространстве, снабженном нормой $\|\cdot\|_p$, а $r^{(p)}(\cdot)$ — соответствующее неприятие риска из (5). Из неравенства Ляпунова [9], §II.6 вытекает

$$1 \le p < q \le \infty \Longrightarrow \|X\|_p \le \|X\|_q,$$

в частности

$$B^{(p)} \supseteq B^{(q)} \text{ при } 1 \le p < q \le \infty,$$

так что

$$r^{(p)}(x) \ge r^{(q)}(x),\ \ 1 \le p < q \le \infty.$$

Другим примером норм могут служить так называемые *энергетические* нормы. Пусть $|\Omega| = n$, так что $\mathcal{X} = R^n$, элементы которого изображаются векторами - столбцами, а A — положительно определенная симметричная матрица $n \times n$. Тогда норма может быть задана выражением

$$\|X\|_A = \sqrt{X'AX}.$$

Рассмотрим совсем простой пример, в котором $n = 2$, $P(\omega) = 1/2, \omega \in \Omega$ и

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

При $a > |b|$ эта матрица положительно определена, а условие

$$a + b = \frac{1}{2}$$

обеспечивает выполнение калибровки (4). Всем этим условиям удовлетворяет однопараметрическое семейство матриц A с коэффициентами

$$a = \frac{1+c}{4},\ b = \frac{1-c}{4},\quad c > 0.$$

Предположим, что предпочтение $\preceq$ инвариантно. Тогда неприятие риска в этой модели вычисляется по формуле (10), супремум в которой достигается на векторе вида

$$X_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = 1/\sqrt{c}$ с тем, чтобы $\|X_\alpha\| = 1$. В случае максимального неприятия риска этот показатель равен

$$r = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Легко видеть, что при допустимых значениях c неприятие риска может принимать сколь угодно большие значения.

[1]Напомним, что мы не различаем случайные величины, совпадающие почти наверное, поэтому нет необходимости в переходе к вычислению $\operatorname{vrai\,sup}$.

5 Когерентные меры риска

В качестве примера вычислим неприятие риска для предпочтений, порожденных когерентными мерами риска [6], [10]. Напомним, что функционал $f : \mathcal{X} \to R$ называется *когерентной мерой риска*, если он обладает свойствами монотонности

$$X \leq Y \Longrightarrow f(X) \leq f(Y),$$

положительной однородности

$$f(\lambda X) = \lambda f(X),\ \lambda \geq 0,$$

инвариантности относительно сдвигов

$$f(X + aI) = f(X) + a,\ a \in R$$

и супераддитивности[2]

$$f(X + Y) \geq f(X) + f(Y).$$

Нетрудно показать, что когерентная мера риска f порождает по правилу (2) естественное инвариантное выпуклое предпочтение $\preceq$, для которого является детерминированным эквивалентом.

Как известно, когерентную меру риска можно задать посредством семейства вероятностных мер $\mathcal{Q}$ по формуле

$$f(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{E}_Q X.$$

Пусть $|\Omega| = 2$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, так что $\mathcal{X} = R^2$ состоит из точек $X = (X_1, X_2)$. Пусть, далее,

$$\mathbf{P} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),\ \mathcal{Q} = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\},$$

и норма на $\mathcal{X} = R^2$ задается посредством

$$\|X\| = \max_{i=1,2} |X_i|.$$

Тогда

$$f(X) = \begin{cases} \frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2, & X_1 \leq X_2 \\ \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2, & X_1 \geq X_2 \end{cases}$$

и множество $\mathcal{X}_0$ состоит из точек $X = (X_1, X_2)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{5}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_2 = 0.$$

Единичная сфера $\|X\| = 1$ пересекается с $\mathcal{X}_0$ в двух точках

$$Y = \left(\frac{3}{5}, -1\right),\ Z = \left(-\frac{3}{5}, 1\right),$$

поэтому

$$r = \max(|f(Y)|, |f(Z)|) = \max\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{15}\right) = \frac{7}{15}.$$

[2]Строго говоря, в [6] когерентными названы функционалы g, связанные с f соотношением $g = -f$, в связи с чем свойства монотонности и инвариантности переформулируются очевидным образом, а вместо свойства супераддитивности постулируется свойство субаддитивности. Однако, ясно, что эти понятия когерентности по существу совпадают.

Список литературы

[1] J.D. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122–136, 1964.

[2] K.J. Arrow. *Essays in the risk-bearing.* Markham, Chicago, 1971.

[3] J.H. Dreze. *Essays on economic decisions under uncertainty.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[4] Дж. фон Нейман and О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение.* Наука, М., 1970.

[5] Новоселов А.А. Неприятие риска: качественный подход и количественные оценки. *Автоматика и телемеханика*, 7:165–177, 2003.

[6] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.

[7] Новоселов А.А. *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения.* Наука, Новосибирск, 2001.

[8] Новоселов А.А. Представление предпочтений на множестве рисков вещественными функционалами. *Труды V Международной конференции по финансово-актуарной математике*, 1:151–165, 2006.

[9] Ширяев А.Н. *Вероятность.* Наука, М., 1989.

[10] Новоселов А.А. Обобщенные когерентные меры риска. *Труды IV Международной конференции по финансово-актуарной математике*, 1:325–339, 2005.

Arcady Arsenievich Novosyolov (Krasnoyarsk, Russia)

Measuring risk aversion

Abstract. *The paper introduces natural preference relations in a set of risks and presents a concept of risk aversion within this model. A representation theorem for natural preference by real valued functionals has been proven, and a method of risk aversion measurement is presented.*
Keywords. *Risk, decision-making, natural preference, risk aversion.*