Стресс-тестирование факторных моделей

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Красноярский государственный торгово-экономический институт, кафедра ВиПМ
Сибирский федеральный университет, Институт математики
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе предлагается метод стресс-тестирования факторной модели рыночного риска посредством возмущения корреляционной матрицы с сохранением ее положительной определенности.*

Ключевые слова. *Риск, факторная модель, корреляционная матрица, положительная определенность.*

В практике управления рыночным риском часто используются [1, 2] факторные модели рыночных активов вида

$$Y = LX + Z, \tag{1}$$

где случайный вектор X размерности m представляет доходность факторов модели, случайный вектор Y размерности n описывает доходность рыночных активов, а матрица L размера $n \times m$ содержит коэффициенты линейной регрессии Y на X. Случайный вектор Z описывает невязки уравнений регрессии. Содержательно первое слагаемое в правой части (1) представляет изменчивость доходности активов, вызываемую изменениями значений факторов, а второе слагаемое - изменчивость доходности активов, специфическую для каждого актива. Обычно в модели предполагается, что X имеет многомерное нормальное распределение с нулевыми средними и ковариационной матрицей $C = \mathbf{E}(XX')$ размера $m \times m$, а Z состоит из независимых нормальных переменных с нулевыми средними и заданными стандартными отклонениями, то есть, имеет диагональную ковариационную матрицу $\mathbf{E}(ZZ') = D$. Предполагается также, что векторы X, Z независимы. Отметим, что ковариационная матрица доходности активов при этом имеет вид

$$A = \mathbf{E}(YY') = \mathbf{E}(LX+Z)(X'L'+Z') = LCL'+D. \tag{2}$$

Кроме того, ковариационную матрицу C можно представить в виде

$$C = \Lambda R \Lambda, \tag{3}$$

где R - корреляционная матрица, а Λ представляет собой диагональную матрицу, на диагонали которой стоят стандартные отклонения компонент вектора X. В условиях нормального функционирования ковариационная матрица C и параметры вектора Z могут быть достаточно хорошо оценены по рыночным данным. Однако, в периоды повышенной волатильности и кризисов, параметры моделей существенно изменяются за относительно небольшие промежутки времени. Для того чтобы иметь представление о возможном поведении портфелей активов в кризисные периоды, проводится стресс-тестирование [2, 3, 4]. Часто при этом ограничиваются увеличением значений волатильности факторов X и "помех"Z. Такое стресс-тестирование сводится к увеличению диагональных элементов матриц A и D, что всегда возможно, и не вызывает технических затруднений. Действительно, для произвольного числа μ возмущенная матрица стандартных отклонений может быть выбрана, например, в виде

$$\Lambda^*_\mu = \mu\Lambda \tag{4}$$

При этом стресс-тестирование сводится к использованию в модели возмущенной матрицы ковариаций

$$C^*(\mu) = \Lambda^*_\mu R \Lambda^*_\mu = \mu^2 C \tag{5}$$

вместо (3). Матрица $C^*(\mu)$, очевидно, сохраняет свойства симметрии и положительной определенности матрицы C.

Однако опыт показывает [3], что в периоды повышенной волатильности рынка изменяются также и корреляции, которые, как правило, существенно возрастают. Попытки непосредственного изменения корреляционной матрицы R в (3) сталкиваются с трудностью обеспечения положительной определенности этой матрицы при возмущении ее элементов. В настоящей работе предлагается семейство возмущений корреляционной матрицы, при котором значения корреляций возрастают, причем обеспечивается выполнение свойства положительной определенности корреляционной матрицы. Описываемое семейство возмущений имеет следующий вид. Обозначим K матрицу размера $m \times m$, состоящую из 1. Для подмножества $M \subseteq N = \{1, 2, \ldots, m\}$ обозначим $M^c = N \setminus M$ и пусть K^M - матрица, элементы k^M_{ij} которой задаются равенствами

$$k^M_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j \in M) \vee (i, j \in M^c), \\ -1, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{6}$$

В частности, $K = K^N$. Матрица K^M является корреляционной матрицей системы идеально (положительно или отрицательно) коррелированных случайных величин.

Возмущение корреляционной матрицы R задается двумя параметрами: подмножеством M и числом $\nu \in [0, 1]$, и имеет вид

$$R^*(M, \nu) = (1 - \nu)R + \nu K^M. \tag{7}$$

Возмущенная ковариационная матрица имеет вид

$$C^{**}(\mu, \nu, M) = \Lambda^*_\mu R^*(M, \nu)\Lambda^*_\mu, \tag{8}$$

где Λ^*_μ и $R(M, \mu)$ заданы в (4) и (7), соответственно.

Теорема 1 *Пусть ковариационная матрица C исходной факторной модели (1) является положительно определенной. Тогда возмущенная матрица $C^{**}(\mu, \nu, M)$ является симметричной и положительно определенной при произвольных значениях параметров $M \subseteq N$, $\mu > 0$ и $\nu \in [0, 1)$. При $\nu = 1$ матрица $C^{**}(\mu, \nu, M)$ вырождается и является лишь неотрицательно определенной.*

Для иллюстрации предлагаемого метода стресс-тестирования опишем его применение к анализу поведения показателя VaR [5] рыночного портфеля активов, где $\alpha \in [0, 1]$ - параметр. Для простоты будем полагать, что матрица L - единичная, то есть, портфель составляется из факторов, и $D = 0$. Обозначим $w = (w_1, \dots, w_n)'$ веса активов в портфеле, так что доходность портфеля представляется в виде $w'Y$. Обозначим P_w, P^*_w, P^{**}_w доходности портфелей, вычисленные, соответственно, при использовании исходной матрицы ковариаций C, простой возмущенной ковариационной матрицы $C^*(\mu)$, и сложной возмущенной ковариационной матрицы $C^{**}(\mu, \nu, M)$. При этом дисперсия доходности портфеля вычисляется, соответственно, по формулам

$$\mathbf{D}P_w = w'Aw = w'\Lambda R\Lambda w, \quad \mathbf{D}P^*_w(\mu) = \mu^2 \cdot \mathbf{D}P_w,$$

$$\mathbf{D}P^{**}_w = w'A^*w = \mu^2 w'\Lambda R^*(M, \nu)\Lambda w.$$

Показатель VaR исходного и возмущенных портфелей вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} q_\alpha(w) = q^0_\alpha x\sqrt{w'Aw}, \quad q^*_\alpha(w) = \mu q_\alpha(w), \\ q^{**}_\alpha(w) = q^0_\alpha \sqrt{w'A^*w} \end{gathered} \tag{9}$$

где q^0_α обозначает квантиль уровня α стандартного нормального распределения. На рис. 1 приведены графики отношений $q^*_\alpha(w)/q_\alpha(w)$ и $q^{**}_\alpha(w)/q_\alpha(w)$ от параметра ν. Видно, что даже при небольшом увеличении стандартных отклонений изменение корреляций может существенно изменять значение VaR.

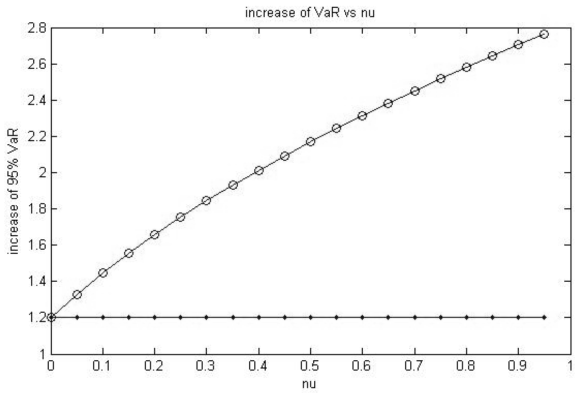

Рис. 1: Изменение параметра 95% VaR при использовании простого возмущения (5) с параметром $\mu = 1.2$ (точки) и возмущения (8) с параметрами $\mu = 1.2$, $\nu = 0, 0.05, \dots, 0.95$, $M = N = \{1, 2, \dots, 77\}$ (окружности)

Список литературы

[1] G. Connor B.G. Briner. How much structure is best? a comparison of market model, factor model and unstructured equity covariance matrices. *The journal of risk*, 10:3–30, 2008.

[2] P. Kupiec. Stress testing in a value at risk framework. *Journal of Derivatives*, 6:7–24, 1998.

[3] M. Sorge. Stress-testing financial systems: an overview of current methodologies. *BIS Working Papers No 165*, pages 1–41, 2004.

[4] K. Dowd J.R. Aragonez, C. Blanko. Incorporating stress tests into market risk modeling. *FEA working paper*, pages 1–6, 2001.

[5] G. Holton. *Value at risk: theory and practice.* Academic Press, San Diego, 2003.