

# Представление распределений смесью распределений Бернулли

Аркадий Арсеньевич Новоселов

Красноярский Торгово-Экономический Институт  
Сибирский Федеральный Университет  
Красноярск  
arcady@novosyolov.ru

**Аннотация.** Представление сложных распределений в виде смеси более простых распределений представляет собой полезный инструмент для решения теоретико-вероятностных задач. В частности, представление произвольного распределения с нулевым средним в виде смеси распределений Бернулли с нулевым средним может использоваться при вычислении неприятия риска в различных моделях предпочтений. В настоящей работе получено одно такое представление.

**Ключевые слова.** Распределение, смесь, распределение Бернулли, неприятие риска, предпочтение

## 1 Мотивация

Пусть  $W_z$  – функция распределения, вырожденного в точке  $z \in \mathbf{R}$ :

$$W_z(x) = \begin{cases} 0, & x < z, \\ 1, & x \geq z. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда нетрудно вывести следующее представление.

**Теорема 1** Пусть  $F$  – произвольная вещественная функция распределения. Тогда справедливо представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_z(x) dF(z), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

**Замечание 1** В теореме утверждается, что произвольная функция распределения  $F$  может быть представлена в виде смеси вырожденных функций распределения, причем в качестве смешивающей функции распределения используется сама  $F$ .

**Доказательство.** Действительно, используя (1), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_z(x) dF(z) = \int_{-\infty}^x dF(z) = F(x),$$

что и требовалось.  $\diamond$

Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  – вероятностное пространство,  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  – пространство случайных величин с конечным математическим ожиданием,  $\mathcal{F}$  – соответствующая совокупность функций распределения на

$\mathbf{R}$  (то есть, функций распределения, для которых интеграл  $\mathbf{E}F = \int x dF(x)$  конечен), и

$$\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : \mathbf{E}F = 0\}$$

совокупность функций распределения с нулевым средним. Представляет интерес аналогичное представление функций из  $\mathcal{F}_0$  в виде смеси возможно более простых распределений также из  $\mathcal{F}_0$ . В настоящей работе мы получим такое представление в виде смеси распределений Бернулли

$$B_{a,b,p}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1-p, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x. \end{cases} \quad (3)$$

где  $a \leq b$  – атомы распределения, имеющие веса  $1-p$  и  $p$ , соответственно (при  $a = b$  распределение Бернулли превращается в вырожденное распределение). Для  $B_{a,b,p} \in \mathcal{F}_0$  имеем  $\mathbf{E}B_{a,b,p} = a + (b-a)p = 0$ , так что с необходимостью  $a < 0 < b$ , и параметр  $p$  однозначно определяется по значениям параметров  $a$  и  $b$  в виде  $p = -a/(b-a)$ . Поэтому распределения Бернулли из класса  $\mathcal{F}_0$  будем обозначать  $B_{a,b}$ . Обозначим еще  $\bar{F}(x)$  скачок функции распределения  $F$  в точке  $x \in \mathbf{R}$ :

$$\bar{F}(x) = F(x+) - F(x-) = \lim_{y \searrow x} F(y) - \lim_{y \nearrow x} F(y).$$

Основным результатом работы является следующая

**Теорема 2** Пусть  $F \in \mathcal{F}_0$ . Тогда найдется однопараметрическое семейство распределений Бернулли  $B_u \in \mathcal{F}_0$ ,  $u \in \mathcal{U} = [0, 1 - F(0+)]$  и функция распределения  $G$  на  $\mathbf{R}$  такая, что

$$F(x) = \int_0^{1-F(0+)} B_u(x) dG(u), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

## 2 Доказательство теоремы 2

Пусть  $F \in \mathcal{F}_0$ , а  $X$  – некоторая случайная величина с функцией распределения  $F$ . Определяя, как обычно, случайные величины  $X^+ = \max\{X, 0\}$ ,  $X^- = \max\{-X, 0\}$ , имеем  $X = X^+ - X^-$  и, в частности,  $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^+ - \mathbf{E}X^- = 0$ .

Определим интервал  $\mathcal{V} = [0, F(0-)]$ , и рассмотрим и функции

$$g(u) = \int_{F(0+)}^{F(0+)+u} F^{-1}(t) dt, \quad u \in \mathcal{U},$$

$$h(v) = \int_{F(0-)}^{F(0-)-v} F^{-1}(t) dt, \quad v \in \mathcal{V},$$

которые представляют собой площади заштрихованных фигур, показанных на рисунке 1. Ясно, что функции  $g$  и  $h$  являются строго возрастающими и непрерывными,  $g(0) = h(0) = 0$ ,  $g(1 - F(0+)) = h(F(0-)) = \mathbf{E}X^+ = \mathbf{E}X^-$ .

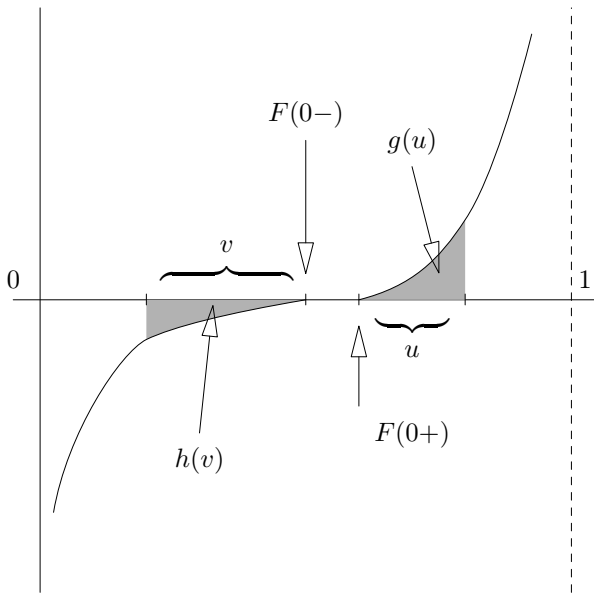


Рис. 1: Определение функций  $g, h$

В частности, существует функция  $h^{-1}$ , обратная к  $h$ , и можно определить функцию  $f(u) = h^{-1}(g(u))$ ,  $u \in \mathcal{U}$ . Функция  $f$  строго возрастает, непрерывна,  $f(0) = 0$  и  $f(1 - F(0+)) = F(0-)$ . Более того, производные функций  $g, h, f$ , существующие почти всюду, вычисляются по формулам

$$g'(u) = F^{-1}(F(0+) + u),$$

$$h'(v) = -F^{-1}(F(0-) - v),$$

$$f'(u) = -\frac{F^{-1}(F(0+) + u)}{F^{-1}(F(0-) - f(u))}.$$

Определим еще функции

$$a(u) = -h'(f(u)), \quad b(u) = g'(u), \quad (5)$$

и отметим, что

$$f'(u) = \frac{g'(u)}{h'(f(u))} = -\frac{b(u)}{a(u)} \quad (6)$$

$$a(1 - F(0+)) = \text{ess inf } X,$$

$$b(1 - F(0+)) = \text{ess sup } X.$$

При  $u \in (0, 1 - F(0+)]$  зададим распределение Бернулли  $B_u$  следующим образом:

$$B_u(x) = \begin{cases} 0, & x < a(u), \\ b(u)/(b(u) - a(u)), & a(u) \leq x < b(u), \\ 1, & x \geq b(u). \end{cases} \quad (7)$$

В качестве  $B_0$  будем использовать предельный случай — распределение, вырожденное в 0:

$$B_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ясно, что  $\mathbf{E}B_u = 0$  при всех  $u \in \mathcal{U}$ , то есть,  $B_u \in \mathcal{F}_0$ ,  $u \in \mathcal{U}$ .

Далее, определим функцию распределения  $G$  следующим образом:

$$G(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \bar{F}(0) + u + f(u), & u \in \mathcal{U}, \\ 1, & u > 1 - F(0+). \end{cases} \quad (9)$$

Эта функция распределения имеет единственный скачок в точке  $u = 0$ , равный  $\bar{F}(0) = F(0+) - F(0-)$  (скачок положителен, если исходная функция распределения имеет разрыв в 0), и непрерывна во всех остальных точках  $\mathbf{R}$ .

Параметрическое множество  $\mathcal{U} = [0, 1 - F(0+)]$ , семейство бернуллиевских распределений (7), (8) и функция распределения (9) определяют все элементы представления (4). Проверим это представление.

Прежде всего, заметим, что (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F(x) &= (F(0+) - F(0-))B_0(x) \\ &+ \int_0^{1-F(0+)} B_u(x) dG(u) \\ &= (F(0+) - F(0-))B_0(x) \\ &+ \int_0^{1-F(0+)} B_u(x)(1 + f'(u)) du \\ &= (F(0+) - F(0-))B_0(x) \\ &+ \int_0^{1-F(0+)} B_u(x) \frac{a(u) - b(u)}{a(u)} du \end{aligned}$$

Пусть сначала  $x < 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{f^{-1}(F(0-)-F(x))}^{1-F(0+)} \frac{b(u)}{b(u)-a(u)} \\ &\times \frac{a(u)-b(u)}{a(u)} du \\ &= \int_{f^{-1}(F(0-)-F(x))}^{1-F(0+)} f'(u) du \\ &= f(1-F(0+)) - f(f^{-1}(F(0-)-F(x))) \\ &= F(0-) - (F(0-) - F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай  $x \geq 0$ . При этом

$$\begin{aligned} F(x) &= (F(0+) - F(0-)) \\ &+ \int_0^{F(x)-F(0-)} (1 + f'(u)) du \\ &+ \int_{F(x)-F(0-)}^{1-F(0+)} f'(u) du \\ &= (F(0+) - F(0-)) \\ &+ \int_0^{F(x)-F(0-)} du \\ &+ \int_0^{1-F(0+)} f'(u) du \\ &= (F(0+) - F(0-)) + (F(x) - F(0-)) \\ &\quad - (F(0+) - F(0-)) + f(1 - F(0+)) - f(0) \\ &= (F(0+) - F(0-)) + F(x) - F(0+) + F(0-) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 3 Примеры

#### 3.1 Симметричное непрерывное распределение

Пусть функция распределения  $F$  непрерывна и симметрична, то есть,  $F(x) = 1 - F(-x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Тогда  $F(0) = 1/2$ ,  $\mathcal{U} = [0, 1/2]$ ,

$$h(u) \equiv g(u), \quad f(u) = u, \quad G(u) = 2u, \quad u \in \mathcal{U},$$

$$b(u) = -a(u) = F^{-1}(u), \quad u \in \mathcal{U} \text{ и}$$

$$B_u(x) = \begin{cases} 0, & x < -F^{-1}(u), \\ 1/2, & -F^{-1}(u) \leq x < F^{-1}(u), \\ 1, & x \geq F^{-1}(u) \end{cases}$$

#### 3.2 Дискретное распределение без атома в 0

Рассмотрим случайную величину  $X$ , принимающую значения  $-2, -1, 1$  и  $3$  с вероятностями  $1/4, 3/8, 1/8$  и

$1/4$ , соответственно. Функция распределения  $F$  этой случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 1/4, & -2 \leq x < -1, \\ 5/8, & -1 \leq x < 1, \\ 3/4, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3, \end{cases}$$

а ее график приведен на рисунке 2.

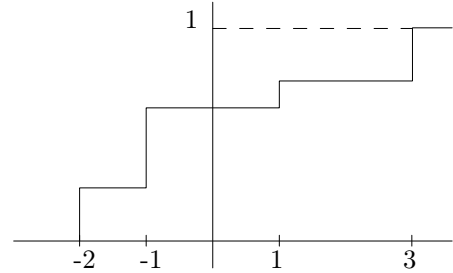


Рис. 2: График функции распределения  $F$

Здесь  $F(0+) = F(0-) = F(0) = 5/8$ , множество значений параметра  $\mathcal{U} = [0, 3/8]$ , а функции  $g, h$  имеют вид

$$\begin{aligned} g(u) &= \begin{cases} u, & u \in [0, 1/8], \\ 3u - 1/4, & u \in [1/8, 3/8], \end{cases} \\ h(v) &= \begin{cases} v, & v \in [0, 3/8], \\ 2v - 3/8, & v \in [3/8, 5/8]. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда

$$f(u) = h^{-1}(g(u)) = \begin{cases} u, & u \in [0, 1/8], \\ 3u - 1/4, & u \in [1/8, 5/24], \\ 3u/2 + 1/16, & u \in [5/24, 3/8]. \end{cases} \quad (11)$$

Графики функций  $g, h, f$  показаны на рисунке 3.

Функции  $a, b$  и  $G$  имеют вид

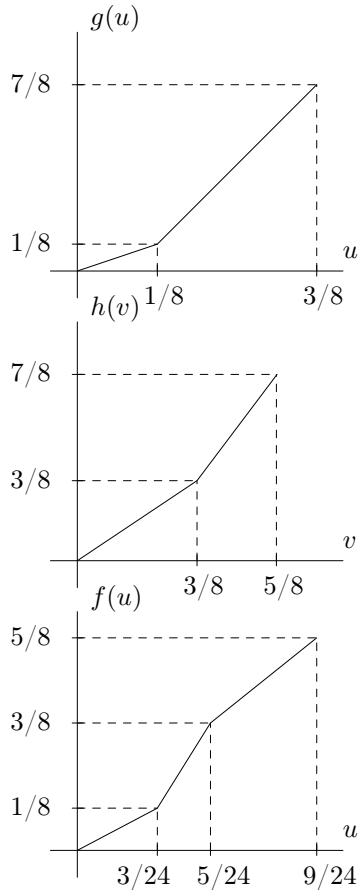
$$a(u) = \begin{cases} -1, & u \in [0, 5/24], \\ -2, & u \in (5/24, 3/8], \end{cases}$$

$$b(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0, 1/8], \\ 3, & u \in (1/8, 3/8], \end{cases}$$

$$G(u) = u + f(u) = \begin{cases} 2u, & u \in [0, 1/8], \\ 4u - 1/4, & u \in (1/8, 5/24], \\ 5u/2 + 1/16, & u \in (5/24, 3/8]. \end{cases}$$

Другими словами представление можно описать так. Обозначим  $F^{(1)} = B_{-1,1}$ ,  $F^{(2)} = B_{-1,3}$ ,  $F^{(3)} = B_{-2,3}$  и

$$\lambda_1 = \int_0^{1/8} dG(u) = 1/4,$$

Рис. 3: Графики функций  $g, h, f$ 

$$\lambda_2 = \int_{1/8}^{5/24} dG(u) = 1/3,$$

$$\lambda_3 = \int_{5/24}^{3/8} dG(u) = 5/12;$$

отметим, что  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Тогда исходная функция распределения имеет вид смеси бернуллиевских распределений

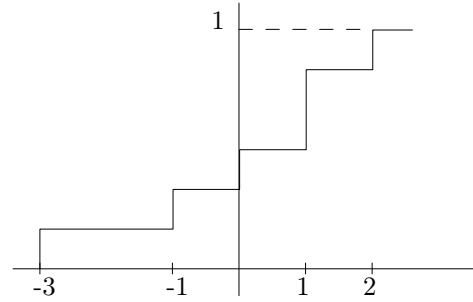
$$F(x) = \lambda_1 F^{(1)}(x) + \lambda_2 F^{(2)}(x) + \lambda_3 F^{(3)}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

### 3.3 Пример с атомом в 0

Пусть теперь случайная величина  $X$  принимает значения  $-3, -1, 0$  и  $2$  с вероятностью  $1/6$  каждое, а значение  $1$  – с вероятностью  $1/3$ . Тогда ее функция распределения  $F$  имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ 1/6, & -3 \leq x < -1, \\ 1/3, & -1 \leq x < 0, \\ 1/2, & 0 \leq x < 1, \\ 5/6, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$$

а ее график приведен на рисунке 4.

Рис. 4: График функции распределения  $F$  с атомом в 0

Здесь  $F(0+) = 1/2$ ,  $F(0-) = 1/3$ , множество значений параметра  $\mathcal{U} = [0, 1/2]$ , а функции  $g, h$  имеют вид

$$g(u) = \begin{cases} u, & u \in [0, 1/3], \\ 2u - 1/3, & u \in [1/3, 1/2], \end{cases} \quad (12)$$

$$h(v) = \begin{cases} v, & v \in [0, 1/6], \\ 3v - 1/3, & v \in [1/6, 1/3]. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(u) = h^{-1}(g(u)) = \begin{cases} u, & u \in [0, 1/6], \\ u/3 + 1/9, & u \in [1/6, 1/3], \\ 2u/3, & u \in [1/3, 1/2]. \end{cases} \quad (13)$$

Графики функций  $g, h, f$  показаны на рисунке 5.

Функции  $a, b$  имеют вид

$$a(u) = \begin{cases} -1, & u \in [0, 1/6], \\ -3, & u \in (1/6, 1/2], \end{cases}$$

$$b(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0, 1/3], \\ 2, & u \in (1/3, 1/2]. \end{cases}$$

Функция  $G$  имеет в 0 скачок размера  $1/6$ , и при неотрицательных значениях аргумента задается выражениями

$$G(u) = u + f(u) + 1/6 = \begin{cases} 2u + 1/6, & u \in [0, 1/6], \\ 4u/3 + 5/18, & u \in [1/6, 1/3], \\ 5u/3 + 1/6, & u \in [1/3, 1/2]. \end{cases}$$

Другими словами представление можно описать так. Обозначим  $F^{(0)} = W_0$ ,  $F^{(1)} = B_{-1,1}$ ,  $F^{(2)} = B_{-3,1}$ ,  $F^{(3)} = B_{-3,2}$  и

$$\lambda_0 = \int_{0-}^0 dG(u) = 1/6, \quad \lambda_1 = \int_0^{1/6} dG(u) = 1/3,$$

$$\lambda_2 = \int_{1/6}^{1/3} dG(u) = 2/9, \quad \lambda_3 = \int_{1/3}^{1/2} dG(u) = 5/10;$$

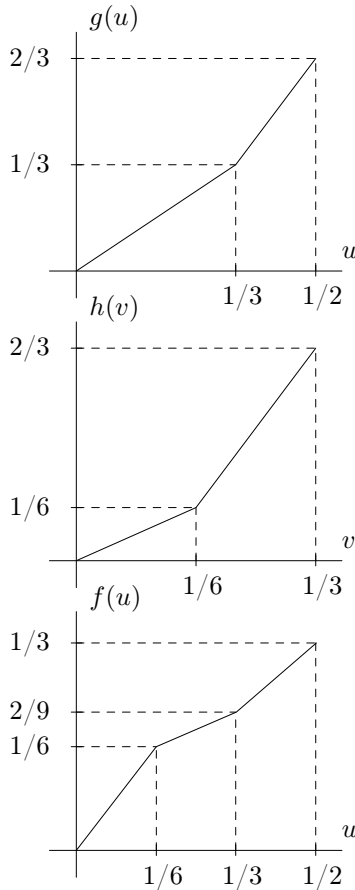


Рис. 5: Графики функций  $g, h, f$  при наличии атома в 0

отметим, что  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Тогда исходная функция распределения имеет вид смеси бернуллиевских распределений и вырожденного распределения

$$F(x) = \lambda_0 F^{(0)}(x) + \lambda_1 F^{(1)}(x) + \lambda_2 F^{(2)}(x) + \lambda_3 F^{(3)}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

### 3.4 Непрерывный пример

Пусть теперь случайная величина  $X$  имеет непрерывное распределение с функцией распределения  $F$ , заданной посредством

$$F(x) = \begin{cases} (2/3)(x+1), & x \in [-1, 0], \\ (1/6)(x+4), & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

График этой функции распределения приведен на рисунке.

Здесь  $\mathcal{U} = [0, 1/3]$ , а выражения для функций  $g, h, f$  имеют вид:

$$g(u) = 3u^2, \quad u \in [0, 1/3], \quad h(v) = 3v^2/4, \quad v \in [0, 2/3], \\ f(u) = h^{-1}(g(u)) = 2u, \quad u \in [0, 1/3].$$

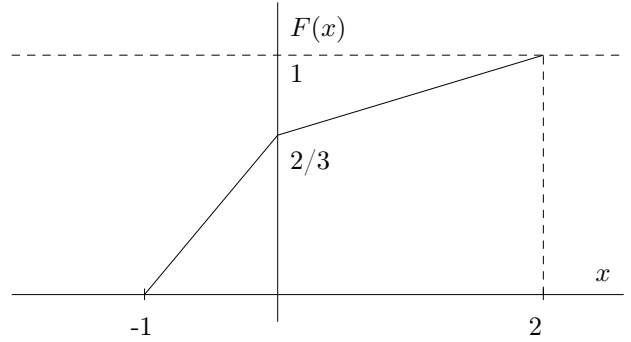


Рис. 6: График непрерывной функции распределения

Ясно также, что  $a(u) = -3u, b(u) = 6u, G(u) = u + f(u) = 3u, u \in \mathcal{U}$ . Тривиальная проверка подтверждает справедливость равенства

$$F(x) = \int_0^{1/3} B_u(x) dG(u), \quad x \in \mathbf{R}$$

и в этом примере.

## 4 Непрерывный вариант

**Теорема 3** Пусть  $F \in \mathcal{F}_0$ . Тогда найдется однопараметрическое семейство распределений Бернулли  $B_z \in \mathcal{F}_0, z \geq 0$  и функция распределения  $G$  такая, что  $G(z) = 0$  при  $z < 0$  и

$$F(x) = \int_0^\infty B_z(x) dG(z), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (14)$$

Доказательство: основные этапы.

Пусть  $F \in \mathcal{F}_0, X$  – случайная величина с функцией распределения  $F$ . Обозначим  $X^+ = \max\{X, 0\}, X^- = \max\{-X, 0\}$ , так что  $X = X^+ - X^-, |X| = X^+ + X^-$  и  $\mathbf{E}X^+ = \mathbf{E}X^-$  (поскольку  $\mathbf{E}X = 0$ ). Рассмотрим функции

$$g(a) = \int_a^0 (F(x) - F(a)) dx, \quad a \leq 0, \\ h(b) = \int_0^b (F(b) - F(x)) dx, \quad b \geq 0. \quad (15)$$

Они, очевидно, являются монотонными,  $g(0) = h(0) = 0$ , и  $g(a) \rightarrow \mathbf{E}X^-, h(b) \rightarrow \mathbf{E}X^+$  при  $a \rightarrow \text{ess inf } X, b \rightarrow \text{ess sup } X$ , соответственно. При  $b \geq 0$  рассмотрим уравнение  $g(a) = h(b)$  относительно  $a$ , и обозначим  $f(b)$  его решение. Оно, очевидно, существует. При наличии у функции распределения  $F$  участков постоянства, это уравнение может иметь много решений; в этом случае в качестве  $f(b)$  можно выбрать произвольное решение. Функция  $f : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ , очевидно, является невозрастающей,  $f(0) = 0$  и  $f(\text{ess sup } X) = \text{ess inf}(X)$ .

## Список литературы

- [1] НОВОСЕЛОВ А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения*. Наука: Новосибирск, 102 с.
- [2] НОВОСЕЛОВ А.А. Неприятие риска: качественный подход и количественные оценки. *Автоматика и телемеханика*, 7, 2003, 165-177.