НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО СРЕДНЕГО

А.А. Новоселов[1]
[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
E-mail: arcadynovosyolov@gmail.com

Аннотация

В работе исследуются некоторые свойства функции относительного среднего, и устанавливается ее связь с порядками стохастического доминирования.

Ключевые слова и фразы: вероятностное распределение, принятие решений, сравнение распределений, стохастическое доминирование, представление предпочтений функционалами

1 Введение

Одним из основных инструментов теории риска является задание полных или частичных предпочтений на множестве вероятностных распределений [1, 2]. В качестве частичных предпочтений часто используются естественные порядки, например, различные варианты стохастического доминирования [3, 4].

В работах [5, 6] введена функция "Омега характеризующая распределения с конечным математическим ожиданием, которую также можно использовать для задания частичного порядка и предпочтения на множестве рисков. В настоящей работе исследуются некоторые свойства этой функции, называемой здесь функцией относительного среднего, и выводятся свойства связанного с ней отношения порядка.

2 Предварительные сведения и обозначения

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ — вещественное измеримое пространство. Каждая случайная величина $X:\ \Omega \to \mathbf{R}$ порождает на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ вероятностное распределение $P = P_X$ посредством

$$P_X(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Нижней $\underline{P}$ и верхней $\overline{P}$ гранями распределения P называются величины

$$\underline{P} = \inf\{a:\ P(a,\infty) < 1\}, \quad \overline{P} = \sup\{b:\ P(-\infty, b) < 1\}.$$

а носителем $\mathcal{S}(P)$ этого распределения называется отрезок $\mathcal{S}(P) = (\underline{P}, \overline{P})$. С каждым вещественным распределением P естественно связаны функция распределения $F = F_P$ и дополнительная функция распределения $S = S_P$

$$F_P(x) = P\left((-\infty, x]\right), \quad S_P(x) = P\left((x, \infty)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Напомним понятия интегральных функций распределения, а также прямого и двойственного стохастического доминирования [3, 4]. Интегральная функция распределения порядка k задается выражением

$$F^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(k-1)}(t)\,dt, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad x \in \mathbf{R},$$

где $F^{(1)} = F$, а двойственная интегральная функция распределения порядка k — выражением

$$S^{(k)}(x) = \int_x^\infty S^{(k-1)}(t)\,dt, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad x \in \mathbf{R},$$

где $S^{(1)} = S$. Необходимым и достаточным условием существования интегральных функций распределения порядка k является конечность моментов распределения до порядка $k-1$ включительно. Прямое стохастическое доминирование $P \leq_k Q$ порядка k по определению означает выполнение неравенства

$$F_P^{(k)}(x) \geq F_Q^{(k)}(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Двойственное стохастическое доминирование $P \leq_k^* Q$ порядка k определяется в терминах дополнительных функций распределения

$$S_P^{(k)}(x) \leq S_Q^{(k)}(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

В [5, 6] для распределений P, обладающих конечным математическим ожиданием, введена функция $f = f_P$

$$f(x) = \frac{\int_x^\infty (1 - F(t))\,dt}{\int_{-\infty}^x F(t)\,dt} = \frac{S^{(2)}(x)}{F^{(2)}(x)}\,, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где $F = F_P$ — функция распределения P, а $F^{(2)}, S^{(2)}$ — соответствующие интегральные функции распределения. Там же показано, что такая функция при некоторых условиях регулярности характеризует распределения с конечными средними, т.е., по функции f_P однозначно восстанавливается распределение P.

Авторами [5, 6] функция f_P была названа функцией "Омега мы будем использовать более нейтральное название "функция относительного среднего"(ФОС). Источником такого названия является тот факт, что числитель и знаменатель выражения (1) тесно связаны с одним способом вычисления математического ожидания $\mathbf{E}P$ распределения P, см., например, [1]:

$$\mathbf{E}P = S_P^{(2)}(0) - F_P^{(2)}(0)\,.$$

Ввиду неограниченности функции $f_P(\cdot)$ на носителе распределения P иногда удобно рассматривать ее монотонное преобразование

$$g_P(x) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,(f_P(x))\,, \tag{2}$$

значения которого лежат в отрезке [0,1].

В настоящей работе мы приведем усиление теоремы о характеризации распределений функциями относительного среднего, и изучим некоторые свойства таких функций.

3 Свойства относительного среднего

Отметим, что функция относительного среднего f_P определена в том и только в том случае, когда $\mathbf{E}P$ конечно, и укажем на следующие очевидные свойства f_P:

$$\lim_{x\to\underline{P}} f_P(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\overline{P}} f_P(x) = 0\,, \quad f_P(\mathbf{E}P) = 1.$$

Теорема 1 *Функция относительного среднего f_P распределения P с функцией распределения $F = F_P$ дифференцируема в точках непрерывности F и монотонно убывает на носителе распределения $\mathcal{S}(P)$.*

Доказательство. Дифференцируя выражение для f_P, получаем выражение

$$f'(x) = \frac{(F(x)-1)F^{(2)}(x) - S^{(2)}(x)F(x)}{\left(F^{(2)}(x)\right)^2} = \frac{F(x)-1-F(x)f(x)}{F^{(2)}(x)}\,,$$

которое, очевидно, отрицательно на носителе распределения. $\diamond$

Теорема 2 *Для распределений P, Q равенство $f_P = f_Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $P = Q$.*

Замечание 1 В [6] теорема о характеризации доказана в предположении непрерывности распределения, которое оказывается излишним. $\diamond$

Доказательство. Ясно, что $P = Q$ влечет $f_P = f_Q$. Покажем, что $f_P = f_Q$ влечет $F_P = F_Q$ и, тем самым, $P = Q$.

Как и в [6], отметим, что ввиду $f_P = f_Q$ средние значения распределения P, Q совпадают, и обозначим это общее значение μ. Далее так же покажем выполнение равенств $F_P^{(2)}(\mu+r) = F_Q^{(2)}(\mu+r)$ при произвольных $r \neq 0$, после чего воспользуемся непрерывностью функции $F_P^{(2)}$, из которой вытекает выполнение равенства $F_P^{(2)}(x) = F_Q^{(2)}(x)$ при всех $x \in \mathcal{S}(P)$. Дифференцирование последнего равенства приводит к утверждению теоремы. $\diamond$

Определение 1 Скажем, что распределение Q доминирует распределение P в среднем, $P \leq_m Q$, если $f_P(x) \leq f_Q(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$ (здесь принимается соглашение $\infty \leq \infty$). $\diamond$

Следующие две теоремы приведем без доказательства, которое сводится к простому применению определений.

Теорема 3 $P \leq_1 Q$ *влечет* $P \leq_m Q$.

Теорема 4 $P \leq_2 Q$ *и* $P \leq_2^* Q$ *влекут* $P \leq_m Q$.

Оказывается, обращение теорем 3, 4 невозможно, см. примеры 4, 5.

4 Примеры

Пример 1 Пусть P — равномерное распределение на отрезке [0,1], так что

$$F(x) = F_P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Тогда носитель распределения есть отрезок $(0,1)$, и относительное среднее имеет вид

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{x^2}\ , \ \ x \in (0,1).$$

Пример 2 Для показательного распределения P на $(0,\infty)$ имеем

$$F(x) = F_P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}, \quad f_P(x) = \frac{e^{-x}}{x + e^{-x} - 1}\,.$$

В рассмотренных примерах функция относительного среднего является выпуклой функцией. В этой связи представляет интерес вопрос: всегда ли функция относительного среднего обладает свойством выпуклости. Следующий пример показывает, что выпуклость функции относительного среднего имеет место не всегда.

Пример 3 Рассмотрим дискретное распределение P с атомами величины $1/3$ в точках 0, 1/3, 1. Функция распределения и функция относительного среднего имеют вид

$$F_P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \le x < 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}, \quad f_P(x) = \begin{cases} (4-6x)/(3x), & 0 \le x < 1/3 \\ (3-3x)/(6x-1), & 1/3 \le x < 1 \end{cases}$$

Производная функции относительного среднего $f = f_P$ имеет вид

$$f'(x) = \begin{cases} -4/(3x^2), & 0 < x < 1/3 \\ -15/(6x-1)^2, & 1/3 < x < 1 \end{cases}.$$

Видно, что левая f'_l и правая f'_r производные f в точке $1/3$ равны $f'_l(1/3) = -12$, $f'_r(1/3) = -15$, так что в точке $x = 1/3$ нарушается необходимое условие выпуклости ($f'_l(x) \le f'_r(x)$ при всех x).

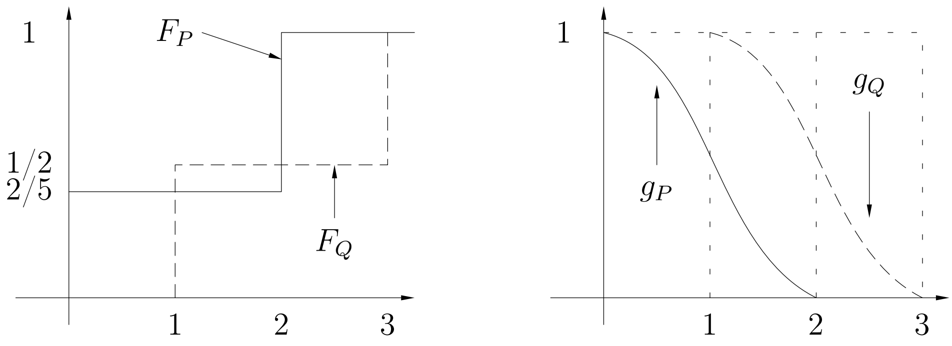
Пример 4 Рассмотрим следующие дискретные распределения: P имеет скачки в точках 0 и 2 с вероятностями $2/5$ и $3/5$ соответственно, а распределение Q имеет скачки в точках 1 и 3 с вероятностями $1/2$ каждый. Функции распределения имеют вид

$$F_P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2/5, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}, \quad F_Q(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases},$$

а функции относительного среднего представляются в виде

$$f_P(x) = \frac{3}{2}\,\frac{2-x}{x}\,, x \in (0,2), \quad f_Q(x) = \frac{3-x}{x-1}\,, x \in (1,3).$$

Видно, что всюду $f_P(x) \le f_Q(x)$, так что $P \le_m Q$. С другой стороны, $F_P(x) < F_Q(x)$ при $x \in (0,1)$ и $x \in (2,3)$, но $F_P(x) > F_Q(x)$ при $x \in (1,2)$, так что стохастическое доминирование первого порядка отсутствует. Графики функций распределения приведены на рис. 1.а, а графики преобразованных функций относительного среднего (ФОС) — на рис. 1.б.



а) Функции распределения б) Преобразованные ФОС

Рис. 1: Иллюстрации к примеру 4

Пример 5 Рассмотрим следующие дискретные распределения: P имеет скачки в точках 0 и 3/4 с вероятностями 1/3 и 2/3 соответственно, а распределение Q имеет скачки в точках 1/4 и 1 с вероятностями 2/3 и 1/3, соответственно. Функции распределения имеют вид

$$F_P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \le x < 3/4 \\ 1, & x \ge 3/4 \end{cases}, \quad F_Q(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/4 \\ 2/3, & 1/4 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases},$$

а интегральные функции распределения —

$$F_P^{(2)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \le 0 \\ x/3, & 0 \le x \le 3/4 \\ x - 1/2, & x \ge 3/4 \end{array} \right., \quad F_Q^{(2)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \le 1/4 \\ (2/3)(x - 1/4), & 1/4 \le x \le 1 \\ x - 1/2, & x \ge 1 \end{array} \right.,$$

поэтому разность $F_P^{(2)} - F_Q^{(2)}$ равна

$$F_P^{(2)}(x) - F_Q^{(2)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x/3, & 0 \le x \le 1/4 \\ 1/6 - x/3, & 1/4 \le x \le 3/4 \\ x/3 - 1/3, & 3/4 \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{array} \right.$$

График этой функции представлен на рис. 2, видно, что функция $F_P^{(2)} - F_Q^{(2)}$ меняет знак на отрезке $[0,1]$, поэтому прямое стохастическое доминирование второго порядка между распределениями P, Q отсутствует.

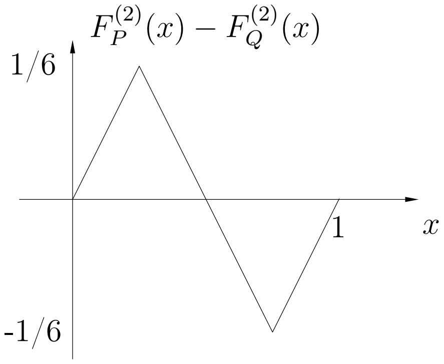


Рис. 2: График разности $F_P^{(2)} - F_Q^{(2)}$ интегральных функций распределения из примера 5

Далее, двойственные интегральные функции распределения для P, Q имеют вид

$$S_P^{(2)}(x) = \begin{cases} (1/2) - x, & x \le 0 \\ (1/2) - (2/3)x, & 0 \le x \le 3/4 \\ 0, & x \ge 3/4 \end{cases},$$

$$S_Q^{(2)}(x) = \begin{cases} (1/2) - x, & x \le 1/4 \\ (1/3) - (1/3)x, & (1/4) \le x \le 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases},$$

а их разность —

$$S_P^{(2)}(x) - S_Q^{(2)}(x) = \begin{cases} x/3, & 0 \le x \le 1/4 \\ 1/6 - x/3, & 1/4 \le x \le 3/4 \\ x/3 - 1/3, & 3/4 \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

то есть, совпадает с $F_P^{(2)} - F_Q^{(2)}$, следовательно, меняет знак на отрезке $[0, 1]$, так что двойственное стохастическое доминирование второго порядка между распределениями P, Q также отсутствует.

С другой стороны,

$$f_P(x) = \frac{S_P^{(2)}(x)}{F_P^{(2)}(x)} = \begin{cases} \infty, & x \le 0 \\ \left((3/2) - 2x\right)/x, & 0 < x \le 3/4 \\ 0, & x \ge 3/4 \end{cases}$$

и

$$f_Q(x) = \frac{S_Q^{(2)}(x)}{Q_P^{(2)}(x)} = \begin{cases} \infty, & x \le 1/4 \\ (1 - x)/(2x - 1/2), & 1/4 < x \le 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases},$$

так что

$$f_Q(x) - f_P(x) = \frac{3(x - 1/2)^2}{x(2x - 1/2)} \ge 0$$

при $1/4 < x \le 3/4$. Выполнение неравенства $f_Q(x) - f_P(x) \ge 0$ при других значениях x очевидно, поэтому распределение Q доминирует распределение P в среднем: $P \le_m Q$. Таким образом, теорема 4 также необратима.

5 Заключение

В работе рассмотрен способ упорядочения вероятностных распределений с помощью функции относительного среднего, изучены свойства этой функции, показана связь нового порядка со стохастическим доминированием первого и второго порядка.

Список литературы

[1] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102с.

[2] Новоселов А.А. (2006) Представление предпочтений на множестве рисков вещественными функционалами. *Труды V ФАМ конференции*, Красноярск, т. 1, с. 151-165.

[3] M.Shaked, J.G.Shanthikumar (1994) *Stochastic Orders and Their Applications.* Academic Press, London.

[4] Новоселов А.А. (2002) Стохастическое доминирование и его приложения в моделировании риска. *Записки ФАМ Семинара*, вып. 7, Красноярск, ИВМ СО РАН, с. 37-44.

[5] (2002) Keating C., Shadwick B. An Introduction to Omega. *AIMA Journal*, April 2002. http://www.aima.org/uploads/2002/Apr/financedevelopmentcentre.pdf

[6] (2003) Cascon A., Keating C., Shadwick B. The Omega Function. Finance Development Centre, working paper, 2003. http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/ Keating_The_omega_function.pdf