Некоторые представления функционала возмущенной вероятности

А.А. Новоселов[1]

[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
Сибирский Федеральный университет
E-mail: anov@inbox.ru

Аннотация

Когерентные меры риска задаются аксиоматически [1] и могут быть представлены конусом приемлемых рисков или семейством вероятностных мер [1]. Для частного случая когерентных мер риска — функционала возмущенной вероятности [2, 3] — справедливы аналогичные представления. В настоящей работе изучается специфика представления функционала возмущенной вероятности семейством вероятностных мер, которая позволяет уточнить место, занимаемое классом этих функционалов в семействе когерентных мер риска.

1 Введение

В [2, 3] был введен класс мер риска, названных функционалами *возмущенной вероятности.* Несколько позже в [1] был рассмотрен класс *когерентных* мер риска, которые оказались обобщением функционала возмущенной вероятности. Естественно возникает вопрос, насколько класс таких обобщенных функционалов шире класса функционалов возмущенной вероятности. В настоящей работе изучается представление мер риска семействами вероятностных мер, которое в известном смысле позволяет ответить на поставленный вопрос.

В §2 сообщаются необходимые предварительные сведения, в §3 приводится основной результат работы (теорема 3), а в §4 рассматривается иллюстрирующий пример.

2 Когерентные меры риска

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ — вещественное измеримое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$, $\mathcal{X}$ — множество случайных величин, т.е. измеримых отображений $X : \Omega \to \mathbf{R}$. Множество $\mathcal{X}$ образует линейное пространство относительно естественных операций над функциями. Каждая случайная величина $X \in \mathcal{X}$ порождает на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ распределение P_X по правилу

$$P_X(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right),\ B \in \mathcal{B}.$$

Это распределение может быть охарактеризовано функцией распределения

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]),\ x \in \mathbf{R}.$$

Различные случайные величины $X, Y \in \mathcal{X}$ могут, вообще говоря, порождать одинаковые распределения $P_X = P_Y$.

Мерой риска называется произвольный функционал $f: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Мера риска f называется *регулярной*, если $f(X) = f(Y)$ для произвольных случайных величин, обладающих свойством $P_X = P_Y$. Обозначим $I \equiv 1$ постоянную случайную величину и выделим еще некоторые свойства мер риска.

(**M**)	$X \le Y \implies f(X) \le f(Y)$	(монотонность);
(**H**)	$f(\lambda X) = \lambda f(X),\ \lambda \ge 0$	(положительная однородность);
(**I**)	$f(X + aI) = f(X) + a,\ a \in \mathbf{R}$	(инвариантность к сдвигам);
(**S**)	$f(X + Y) \ge f(X) + f(Y)$	(супераддитивность).

Когерентной [1] называется мера риска f, обладающая[1] свойствами (**M**), (**H**), (**I**) и (**S**).

Мерой *возмущенной вероятности* [2, 3] называется функционал

$$\pi_g(X) = \int_{-\infty}^{0} \left[g\left(1 - F_X(t)\right) - 1 \right] dt + \int_{0}^{\infty} g\left(1 - F_X(t)\right) dt\,, \quad X \in \mathcal{X}\,, \tag{1}$$

где функция $g:\ [0,1] \to [0,1]$ является неубывающей и обладает свойствами $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Эта функция служит параметром функционала возмущенной вероятности.

Теорема 1 *Функционал π_g является регулярной мерой риска. Если функция g выпукла на $[0,1]$, то функционал π_g является когерентной мерой риска.*

Доказательство. Регулярность функционала возмущенной вероятности очевидна из определения (1). Наличие свойств (**M**), (**H**), (**I**) легко устанавливается непосредственной проверкой. Кроме того, в [4] показано, что выпуклость функции g достаточна для супераддитивности функционала π_g. Таким образом, функционал π_g с выпуклым параметром g является когерентной мерой риска. $\diamond$

3 Представление семействами вероятностных мер

Пусть Q — вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Для $X \in \mathcal{X}$ обозначим

$$\mathbf{E}_Q X = \int_{\Omega} X(\omega)\, dQ(\omega)$$

математическое ожидание X относительно вероятностной меры Q. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2 *Пусть f — когерентная мера риска. Тогда существует семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$ на $(\Omega, \mathcal{A})$ такое, что*

$$f(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{E}_Q X. \tag{2}$$

[1] Строго говоря, в [1] когерентными мерами риска называются функционалы $-f$, однако все результаты легко переносятся из одной трактовки в другую.

Замечание 1 Очевидна справедливость теоремы, обратной к теореме 2. $\diamond$

Назовем семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$ из теоремы 2 генератором когерентной меры риска f.

Замечание 2 Легко убедиться в том, что наряду с $\mathcal{Q}$ генератором является выпуклая оболочка $Co(\mathcal{Q})$ этого семейства, а также произвольное промежуточное семейство $\mathcal{P}$: $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P} \subseteq Co(\mathcal{Q})$. $\diamond$

Теперь получим уточнение представления (2) для случая функционала возмущенной вероятности π_g. Для простоты рассмотрим лишь конечный случай $|\Omega| = n$. При этом основная вероятностная мера $\mathbf{P}$ описывается набором вероятностей $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_n)$, вероятностная мера общего вида Q на $(\Omega, \mathcal{A})$ описывается вектором $Q = (q_1, \dots, q_n)$, а случайная величина $X \in \mathcal{X}$ представляется вектором $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Из [4] известно, что если $X = (x_1, \dots, x_n)$ таков, что

$$x_1 \leq \cdots \leq x_n, \tag{3}$$

то значение функционала π_g в точке X вычисляется по формуле

$$\pi_g(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k q_k = \mathbf{E}_Q X, \tag{4}$$

где

$$q_k = g(r_k) - g(r_{k+1}), \quad r_k = \sum_{i=k}^{n} p_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad r_{n+1} = 0.$$

Ясно, что $q_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$ и $q_1 + \cdots + q_n = 1$, так что $Q = (q_1, \dots, q_n)$ действительно является вероятностной мерой, что оправдывает последнее равенство в (4).

Если для $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ не выполняется (3), то рассмотрим перестановку γ элементов множества $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, т.е. отображение $\mathcal{N}$ *на* себя, при котором выполнено

$$x_{\gamma(1)} \leq \cdots \leq x_{\gamma(n)}, \tag{5}$$

При этом значение π_g в точке X вычисляется посредством

$$\pi_g(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k q_k^{\gamma} = \mathbf{E}_{Q^{\gamma}} X, \tag{6}$$

где

$$Q^{\gamma} = (q_1, \dots, q_n), \ q_k^{\gamma} = g(r_k^{\gamma}) - g(r_{k+1}^{\gamma}), \ r_k^{\gamma} = \sum_{i=k}^{n} p_{\gamma(i)}, \ k = 1, \dots, n, \ r_{n+1}^{\gamma} = 0. \tag{7}$$

Отсюда выводим, что для вычисления значения π_g в произвольной точке $X \in \mathcal{X}$ достаточно знать $n!$ вероятностных мер Q^{γ} для всевозможных перестановок γ множества $\mathcal{N}$. Нетрудно заметить, что по построению $\mathbf{E}_{Q^{\gamma}} X$ минимально для той перестановки γ, для которой имеет место упорядочение (5). Обозначив $\mathcal{Q} = \{Q^{\gamma},\ \gamma \in \Gamma\}$, где Γ — совокупность всех перестановок множества $\mathcal{N}$, получаем

$$\pi_g(X) = \min_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{E}_Q X. \tag{8}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть возмущающая функция g выпукла, $|\Omega| = n$, а Γ — совокупность всевозможных перестановок множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$. Тогда генератором функционала возмущенной вероятности является семейство вероятностных мер $\mathcal{Q} = \{Q^\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, где Q^γ определены в (7), т.е. этот функционал представляется в виде (8). Ввиду замечания 2 генератором можно считать и выпуклую оболочку Q, которая является выпуклым многогранником в стандартном симплексе вероятностных мер.*

4 Пример

Пусть $|\Omega| = 3$, $\mathbf{P} = (1/4, 1/4, 1/2)$, $g(v) = v^2$, $v \in [0, 1]$. Множество вероятностных мер образует стандартный симплекс в $\mathbf{R}^3$, имеющий вид равностороннего треугольника. В табл. 1 перечислены все перестановки γ множества $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, соответствующие вероятностные меры Q^γ, а также значения соответствующих математических ожиданий для точки $X = (1, 5, 3)$. Видно, что упорядочивающей перестановкой для данного X является $\gamma = (1, 3, 2)$, и наименьшее значение математического ожидания находится в строке таблицы, соответствующей этой перестановке.

γ	Q^γ	$\mathbf{E}_{Q^\gamma}X$
(1,2,3)	(7/16,5/16,1/4)	44/16
(1,3,2)	(7/16,1/16,1/2)	36/16
(2,1,3)	(5/16,7/16,1/4)	52/16
(2,3,1)	(1/16,7/16,1/2)	60/16
(3,1,2)	(3/16,1/16,3/4)	44/16
(3,2,1)	(1/16,3/16,3/4)	52/16

Таблица 1: Генератор $\mathcal{Q}$ и математические ожидания для $X = (1, 5, 3)$

На рис. 1 в плоскости стандартного симплекса $\mathbf{R}^3$ изображен многоугольник, вершины которого входят в $\mathcal{Q}$. В общем случае конечного Ω генератор представляет собой многогранник, все грани которого параллельны граням стандартного симплекса вероятностных мер.

Отметим, что генератором произвольной когерентной меры риска может служить произвольное выпуклое множество в стандартном симплексе $\mathbf{R}^n$, не обязательно являющееся многогранным. В этом и состоит то различие между когерентными мерами риска и их частным случаем — функционалом возмущенной вероятности — которое можно описать в терминах генераторов.

Список литературы

[1] Artzner, P., Delbaen F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

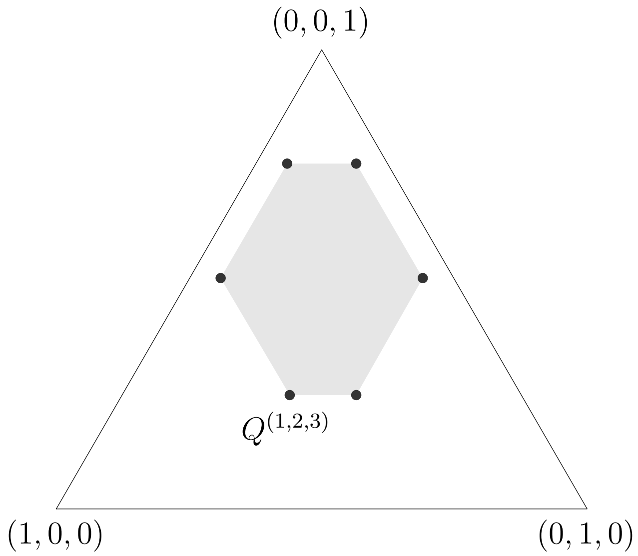

Рис. 1: Генератор функционала возмущенной вероятности

[2] WANG, S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.

[3] YOUNG V.R. (1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.

[4] НОВОСЕЛОВ А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102с.