О СОДЕРЖАТЕЛЬНОМ СМЫСЛЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДОМИНИРОВАНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.А. Новоселов[1]
[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
E-mail: anov@icm.krasn.ru

Аннотация

В работе получены интегральное и асимптотическое представления для дополнительных интегральных функций распределения. Приведены примеры, иллюстрирующие содержательный смысл прямого и двойственного стохастического доминирования второго порядка в терминах перестрахования и сделок с опционами.
Ключевые слова и фразы: стохастическое доминирование, распределение, перестрахование, франшиза, опцион

1 Введение

Частичный порядок на множестве вероятностных распределений, известный как стохастическое доминирование, играет значительную роль при исследовании индивидуальных предпочтений в теории риска. Это понятие детально представлено в книге [1]. В [2] описаны некоторые обобщения понятия стохастического доминирования и свойства этих обобщений, а также приведены некоторые интегральные представления для интегральных функций распределения.

Стохастическое доминирование первого порядка имеет прозрачный содержательный смысл. Для отношения доминирования более высоких порядков содержательный смысл не столь очевиден. В настоящей работе приводится интерпретация прямого и двойственного стохастического доминирования второго порядка в терминах чистой премии за передачу рисков нескольких типов: страхование с франшизой, перестрахование, сделки с опционами европейского стиля.

В параграфе 2 введены необходимые понятия и определены интегральные функции распределения, приведены интегральное и асимптотическое представления для дополнительных функций распределения, аналогичные выведенным в [2] для прямых функций распределения. В параграфе 3 дано определение прямого и двойственного отношений стохастического доминирования и приведены примеры финансовых рисков с содержательной интерпретацией стохастического доминирования второго порядка.

2 Основные понятия и обозначения

Рассмотрим измеримое пространство $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, где $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел, а $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра. Функция множества $P : \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ называется *вероятностной мерой (вероятностным распределением)*, если она σ-аддитивна, ее значения неотрицательны и $P(\mathbf{R}) = 1$. Обозначим $\mathcal{P}$ совокупность всех вероятностных распределений на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$. Вероятностное распределение $P \in \mathcal{P}$ можно охарактеризовать *функцией распределения* $F = F_P$, задаваемой по правилу $F_P(x) = P((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$, или *дополнительной функцией распределения* $S = S_P$, вычисляемой по формуле $S_P(x) = 1 - F_P(x) = P((x, \infty))$, $x \in \mathbf{R}$.

Для функции распределения F зададим интегральные функции распределения $F^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ посредством $F^{(1)} = F$ и

$$F^{(k+1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(k)}(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \dots, \ x \in \mathbf{R}.$$

Для дополнительной функции распределения S интегральные функции распределения задаются аналогично: $S^{(1)} = S$ и

$$S^{(k+1)}(x) = \int_{x}^{\infty} S^{(k)}(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \dots, \ x \in \mathbf{R}.$$

Графическое представление интегральных функций распределения порядка $k = 2$ приведено на рис. 1.

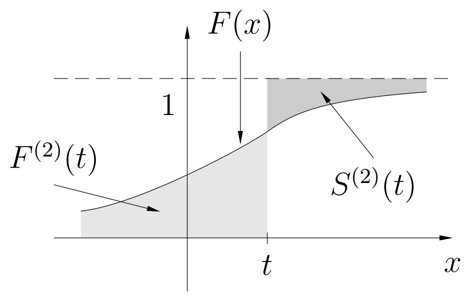


Рис. 1: Интегральные функции распределения, $k = 2$

Обозначим μ_k^P момент порядка k распределения $P \in \mathcal{P}$:

$$\mu_k^P = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF_P(x), \ k = 0, 1, 2, \dots$$

Известно [2], что существование моментов до порядка k включительно обеспечивает существование интегральных функций распределения $F^{(k+1)}$ и $S^{(k+1)}$. При этом справедливы представления [2]

$$F^{(k+1)}(x) = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{x} (x - t)^k\, dF(t), \quad \lim_{x \to \infty} \Big(F^{(k+1)}(x) - a_k(x) \Big) = 0, \tag{1}$$

где

$$a_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x^{k-i} \mu_i, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}\,,$$

то есть, a_k является полиномом степени k со старшим коэффициентом $1/k!$; здесь C_k^i представляют собой биномиальные коэффициенты.

Аналогично выводятся представления для дополнительных интегральных функций распределения

$$S^{(k+1)}(x) = \frac{1}{k!}\int_x^{\infty}(t-x)^k\,dF(t), \quad \lim_{x\to-\infty}\Big(S^{(k+1)}(x) - |a_k(x)|\Big) = 0, \tag{2}$$

В частности, для $F^{(2)}$ при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое представление $F^{(2)}(x) \sim x - \mu_1$, а для $S^{(2)}$ при $x \to -\infty$ — асимптотическое представление $S^{(2)}(x) \sim -x + \mu_1$.

Приведем примеры интегральных функций распределения. Обозначим W_a вероятностное распределение, *вырожденное* в точке $A \in \mathbf{R}$. Ему соответствуют функция распределения F_{W_a} и дополнительная функция распределения S_{W_a}

$$F_{W_a}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}, \quad S_{W_a}(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}.$$

Моменты этого распределения равны $\mu_k = a^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а интегральные функции распределения для W_0 и $k = 2, 3$ имеют вид

$$F^{(2)}_{W_a}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ x - a, & x \geq a \end{cases} \qquad S^{(2)}_{W_0}(x) = \begin{cases} a - x, & x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

$$F^{(3)}_{W_a}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^2/2, & x \geq a \end{cases} \qquad S^{(3)}_{W_0}(x) = \begin{cases} (a-x)^2/2, & x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

На рис. 2 приведены графики интегральных функций распределения W_0 для $k = 1, 2$.

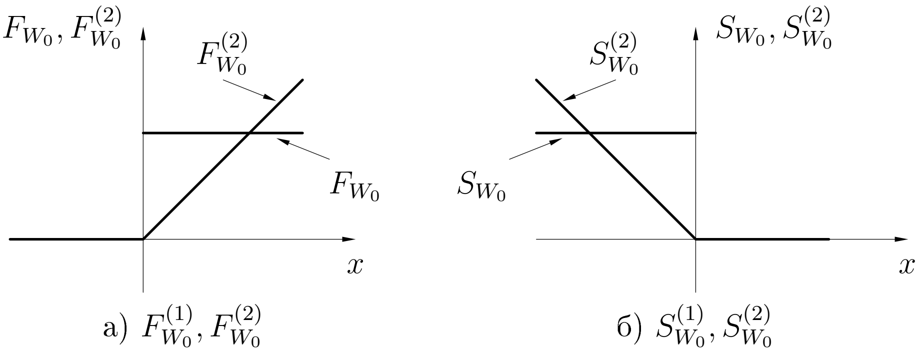


Рис. 2: Графики интегральных функций распределения W_0

Для иллюстрации рассмотрим также распределения Бернулли $B_{a,b,p}$ с параметрами $-\infty < a < b < \infty$ и $0 \leq p \leq 1$, описываемые функциями распределения

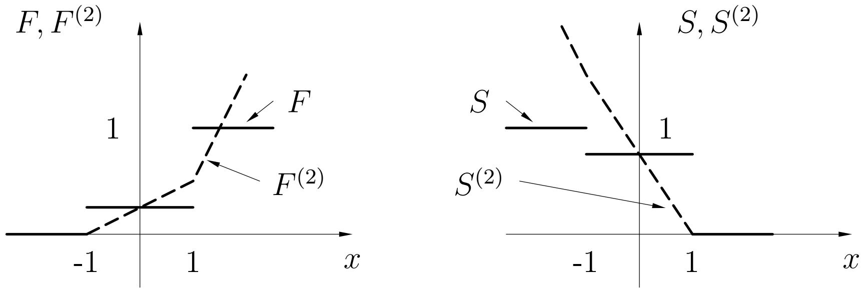
$$F_{B_{a,b,p}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1-p & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \qquad S_{B_{a,b,p}}(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ p & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

Первые моменты этого распределения имеют вид $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = a(1-p) + bp$, $\mu_2 = a^2(1-p) + b^2p$, интегральные функции распределения второго порядка задаются выражениями

$$F^{(2)}_{B_{a,b,p}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (1-p)(x-a), & a \leq x < b \\ (1-p)(b-a) + (x-b), & x \geq b \end{cases}$$

$$S^{(2)}_{B_{a,b,p}}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq b, \\ p(b-x), & a \leq x < b \\ p(b-a) + (a-x), & x < a \end{cases}$$

а графики функций распределения показаны на рис. 3.



а) $F^{(1)}_{B_{-1,1,3/4}}, F^{(2)}_{B_{-1,1,3/4}}$ б) $S^{(1)}_{B_{-1,1,3/4}}, S^{(2)}_{B_{-1,1,3/4}}$

Рис. 3: Графики интегральных функций распределения $B_{-1,1,3/4}$

3 Смысл стохастического доминирования

Скажем, что между распределениями $P, Q \in \mathcal{P}$ имеется стохастическое доминирование *первого рода* (*прямое* стохастическое доминирование) порядка k (обозначается $P \leq_k Q$), если

$$F^{(k)}_P(x) \geq F^{(k)}_Q(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Стохастическое доминирование *второго рода* (*двойственное* стохастическое доминирование) порядка k (обозначается $P \leq^*_k Q$) определяется аналогично через дополнительные функции распределения

$$S^{(k)}_P(x) \leq S^{(k)}_Q(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Отметим, что знаки неравенства между интегральными функциями распределения в (3) и (4) противоположны. Если распределения P, Q порождаются на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ случайными величинами X, Y, соответственно, то будем использовать также обозначения $X \leq_k Y$ и $X \leq^*_k Y$ для прямого и двойственного доминирования, соответственно.

Пусть X — случайная величина с конечным математическим ожиданием, порождающая на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ вероятностное распределение P с функцией распределения F и дополнительной функцией распределения S. Назовем $\pi(X) = \mathbf{E}X$ *чистой премией* за передачу риска X и отметим легко выводимое равенство

$$\mathbf{E}X = t + S^{(2)}(t) - F^{(2)}(t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Обозначим $(x)_+ = \max(x, 0)$. При заданном риске X и фиксированном $K \in \mathbf{R}$ рассмотрим риск $(X-K)_+ = \max(X-K, 0)$, и вычислим его чистую премию $\mathbf{E}(X -$

$K)_+$. Имеем

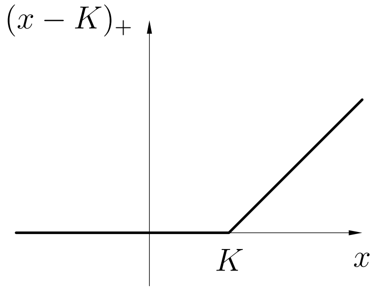
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X-K)_+ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(x-K,0)\,dF(x)\\ &= \int_K^{\infty}(x-K)\,dF(x) = \int_K^{\infty}(K-x)\,d(1-F(x))\\ &= (K-x)(1-F(x))|_K^{\infty} + \int_K^{\infty}(1-F(x))\,dx = S^{(2)}(K).\end{aligned}$$

Для чистой премии риска $(K-X)_+$ аналогично получаем $\mathbf{E}(K-X)_+ = F^{(2)}(K)$, так что

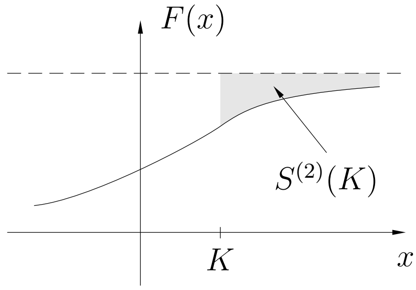
$$\mathbf{E}(X-K)_+ = S^{(2)}(K), \quad \mathbf{E}(K-X)_+ = F^{(2)}(K). \tag{5}$$

Рассмотрим рыночный актив, цена которого в некоторый будущий момент времени T описывается случайной величиной X. Снова обозначим F и S прямую и дополнительную функции распределения X, соответственно. *Европейский опцион колл* на этот актив с ценой исполнения K и датой исполнения T имеет платежную функцию $u_K(X) = (X-K)_+$. Чистая премия за этот опцион в соответствии с (5) имеет вид $\pi(u_K(X)) = S^{(2)}(K)$. Платежная функция *европейского опциона пут* на тот же актив с ценой исполнения K и датой исполнения T равна $l_K(X) = (K-X)_+$. Чистая премия за этот опцион по (5) имеет вид $\mathbf{E}l_K(X) = F^{(2)}(K)$. Таким образом, наличие прямого стохастического доминирования $X \leq_2 Y$ второго порядка означает, что чистая премия за опцион пут на актив X не превосходит чистой премии за опцион пут на актив Y при любой цене исполнения K. Двойственное стохастическое доминирование $X \leq_2^* Y$ означает то же для европейских опционов колл на активы X и Y.

Графики платежных функций $u_K(x) = (x-K)_+$ и $l_K(x) = (K-x)_+$ и соответствующие чистые премии $\mathbf{E}u_K(X) = S^{(2)}(K)$, $\mathbf{E}l_K(X) = F^{(2)}(K)$ представлены на рис. 4, 5.



а) платежная функция u_K

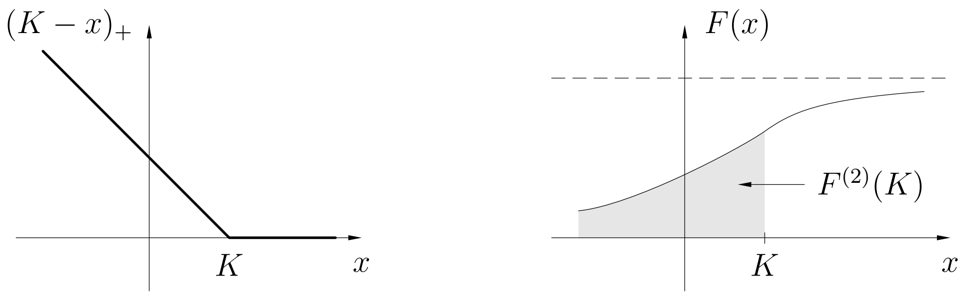


б) $S^{(2)}(K)$

Рис. 4: Платежная функция и чистая премия европейского опциона колл

Для заданного уровня K рассмотрим дележ риска X вида

$$X = L_K(X) + U_K(X), \tag{6}$$



а) платежная функция $l_K = (K-x)_+$ б) $F^{(2)}(K)$

Рис. 5: Платежная функция и чистая премия европейского опциона пут

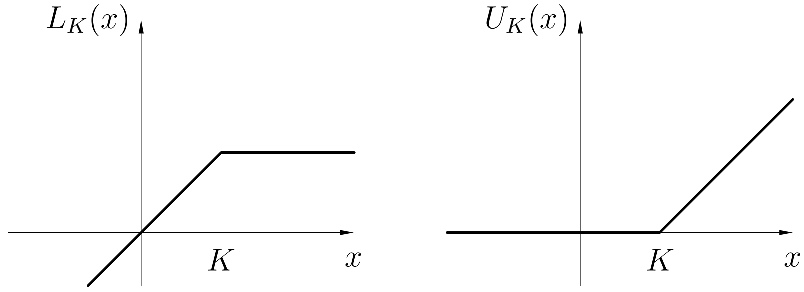
где случайные величины $L_K(X), U_K(X)$ выражаются через X с помощью неубывающих функций

$$L_K(x) = \min\{x, K\} = \begin{cases} x, & x \le K \\ K, & x > K \end{cases},$$

$$U_K(x) = \max\{0, x-K\} = (x-K)_+ = \begin{cases} 0, & x \le K \\ x-K, & x > K \end{cases}.$$

Имеем $U_K(X) = (X-K)_+$ и $L_K(X) = K - (K-X)_+$, откуда

$$\pi(U_K(X)) = \mathbf{E}U_K(X) = S^{(2)}(K), \ \ \pi(L_K(X)) = \mathbf{E}L_K(X) = K - F^{(2)}(K).$$



а) $L_K(x) = x - (x-K)_+$ б) $U_K(x) = (x-K)_+$

Рис. 6: Лейеры рисков перестрахования стоп-лосс

Описанный дележ риска возникает, например, в *перестраховании стоп-лосс*, при этом риск $L_K(X)$ остается на *собственном удержании* страховщика, а риск $U_K(X)$ передается в *перестрахование*. Величину K также называют собственным удержанием страховщика. Таким образом, наличие двойственного стохастического доминирования второго порядка $X \le_2^* Y$ эквивалентно семейству неравенств $\pi(U_K(X)) \le \pi(U_K(Y))$, $K \in \mathbf{R}$, то есть, чистая премия за перестрахование риска Y оказывается не меньше соответствующей чистой премии за перестрахование X при любом размере собственного удержания K. Риск Y оказывается дороже риска X с точки зрения перестрахования, при любом размере собственного удержания.

Другим примером дележа риска (6) в страховании является страхование с *безусловной франшизой*. В этом случае K означает размер франшизы, риск $L_K(X)$ остается на собственном удержании страхователя, а риск $U_K(X)$ передается в страхование. Величина $\pi(U_K(X))$ является чистой премией за страхование с франшизой.

Наличие двойственного стохастического доминирования второго порядка $X \leq_2^* Y$ означает, что страхование риска Y с франшизой K дороже страхования риска X с франшизой K при любом размере франшизы.

Список литературы

[1] M.Shaked, J.G.Shanthikumar (1994) *Stochastic Orders and Their Applications.* Academic Press, London.

[2] Новоселов А.А.(2002) Стохастическое доминирование и его приложения в моделировании риска. *Записки ФАМ Семинара*, т. 7, Красноярск: ИВМ СО РАН, с. 37-44.