ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ЭКВИВАЛЕНТ В МОДЕЛЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

А.А. Новоселов[1]
[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
E-mail: anov@icm.krasn.ru

Аннотация

В работе приводится вид детерминированных эквивалентов классических мер риска, а также описывается метод вычисления детерминированного эквивалента обобщенной когерентной меры риска.
Ключевые слова и фразы: риск, принятие решений, мера риска, детерминированный эквивалент, обобщенная когерентная мера риска

1 Введение

Принятие решений в условиях риска основано на представлении индивидуальных предпочтений вещественными функционалами [1], [2]. Наиболее удобным в приложениях способом представления являются функционалы, являющиеся детерминированными эквивалентами (канонические функционалы) [2], [3].

В настоящей работе приведены детерминированные эквиваленты для некоторых классических мер риска: ожидаемой полезности [4], когерентных мер риска [5], а также приведен метод вычисления детерминированного эквивалента для обобщенных когерентных мер риска [6], [7].

2 Детерминированный эквивалент

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Измеримое отображение $X : \Omega \to \mathbf{R}$ называется случайной величиной (*риском*). Случайная величина X называется *ограниченной*, если при некотором $M \in \mathbf{R}$ выполняется $\mathbf{P}(|X| \le M) = 1$. Обозначим $\mathcal{X}$ совокупность всех ограниченных случайных величин, а $I \in \mathcal{X}$ — единичную случайную величину: $I(\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$. Отметим, что $\mathcal{X}$ является линейным пространством с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. Обозначим C_+ конус неотрицательных рисков, состоящий из почти наверное неотрицательных случайных величин: $C_+ = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(X \ge 0) = 1\}$, а C_{--} — конус отрицательных рисков, $C_{--} = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(X < 0) = 1\}$.

Мерой риска называется произвольный функционал $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Мера риска порождает на $\mathcal{X}$ отношение *предпочтения* $\preceq$, то есть, полное транзитивное отношение, по правилу [2]

$$X \preceq Y \iff f(X) \le f(Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}.$$

Различные меры риска могут порождать одно и то же отношение предпочтения. Мера риска f называется *детерминированным эквивалентом*, если $f(aI) = a$, $a \in \mathbf{R}$.

В [4] были рассмотрены линейные отношения предпочтения, которые представляются функционалами ожидаемой полезности $f_U(X) = \mathbf{E}U(X)$; здесь U — строго возрастающая вещественная функция, $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, называемая *функцией полезности.* Легко видеть, что детерминированным эквивалентом ожидаемой полезности является функционал c_U, задаваемый равенством $c_U(X) = U^{-1}(\mathbf{E}U(X))$. Действительно, $\mathbf{E}U(aI) = U(a)$, так что $c_U(aI) = a$, $a \in \mathbf{R}$.

В [5] были введены когерентные меры риска; так были названы функционалы f, обладающие свойствами монотонности, инвариантности к сдвигам, положительной однородности и супераддитивности, определенными ниже.

(M) Монотонность,	$X \leq Y \implies f(X) \leq f(Y)$
(I) Инвариантность к сдвигам,	$f(X + aI) = f(X) + a, \ a \in \mathbf{R}$
(H) Положительная однородность,	$f(aX) = af(X), \ a \geq 0$
(S) Супераддитивность,	$f(X + Y) \geq f(X) + f(Y)$

Из свойства положительной однородности вытекает равенство $f(0) = 0$, которое вместе со свойством инвариантности к сдвигам (примененным при $X = 0$) дает $f(aI) = a$, $a \in \mathbf{R}$. Таким образом, когерентные меры риска сами по себе являются детерминированными эквивалентами.

Когерентную меру риска можно определить, используя понятие *множества приемлемых рисков* [5]. Так называется выпуклый замкнутый конус $A \subset \mathcal{X}$, обладающий свойствами $C_+ \subseteq A$ и $A \cap C_{--} = \emptyset$. Когерентная мера риска $f = f_A$ определяется, как

$$f(X) = \sup\{b \in \mathbf{R} : \ X - bI \in A\}. \tag{1}$$

В [7] была введена обобщенная когерентная мера риска. Этот функционал также задается посредством множества приемлемых рисков A. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в линейном пространстве $\mathcal{X}$, а A — множество приемлемых рисков. Обобщенная мера риска $f = f_{\|\cdot\|,A}$ задается посредством

$$f(X) = \delta_A(X) d(X, \partial A), \quad \delta_A(X) = \begin{cases} 1, & X \in A \\ -1 & X \in A^c \end{cases} \tag{2}$$

Здесь ∂A — граница множества A, а $d(X, B) = \inf_{Y \in B} \|X - Y\|$ — обычное расстояние от точки X до множества $B \subseteq \mathcal{X}$.

Обозначим $\mathcal{X}^*$ линейное пространство, двойственное к $\mathcal{X}$, а $\| \cdot \|_*$ — норму в $\mathcal{X}^*$. Пусть $A^* \subseteq \mathcal{X}^*$ — двойственный конус для A, то есть, совокупность всех линейных функционалов $g \in \mathcal{X}^*$, обладающих свойством $g(X) \geq 0$, $X \in A$. В A^* выделим подмножество функционалов единичной нормы $A_1^* = \{g \in A^* : \ \|g\|_* = 1\}$. В [7] получено представление обобщенной когерентной меры риска в виде

$$f(X) = \inf_{g \in A_1^*} g(X). \tag{3}$$

Из этого представления получим выражение для детерминированного эквивалента обобщенной когерентной меры риска. Прежде всего отметим, что для произвольной *положительно однородной* меры риска f детерминированный эквивалент c вычисляется по формуле

$$c(X) = \begin{cases} f(X)/f(I), & \text{если } f(X) \geq 0 \\ -f(X)/f(-I), & \text{если } f(X) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что проблема вычисления детерминированного эквивалента обобщенной когерентной меры риска сводится к вычислению значений $f(I), f(-I)$ по формуле (3). Поскольку функционалы g в (3) линейны, получаем

$$f(I) = \inf_{g \in A_1^*} g(I), \quad f(-I) = -\sup_{g \in A_1^*} g(I). \tag{5}$$

Дальнейшие вычисления зависят от конкретной нормы $\|\cdot\|$ и формы конуса приемлемых рисков A. Техника таких вычислений проиллюстрирована примерами в параграфе 3.

3 Примеры

Пусть $|\Omega| = n$, тогда $\mathcal{X}$ изоморфно $\mathbf{R}^n$, и случайные величины $X \in \mathcal{X}$ представляются векторами $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Двойственное пространство $\mathcal{X}^*$ также изоморфно $\mathbf{R}^n$, линейные функционалы представляются векторами $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ и вычисляются посредством

$$g(X) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \cdots + g_n x_n.$$

В $\mathbf{R}^n$ часто используется семейство норм

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$1 \leq p \leq \infty$. Двойственной нормой в $\mathcal{X}^*$ является $\|\cdot\|_q$ с $q = p/(p-1)$. Во всех примерах рассматривается случай $n = 2$.

Пример 1 Для иллюстраций используется конус приемлемых рисков A, являющийся пересечением следующих двух полупространств $L_1^+ = \{(x_1, x_2) : \; 2x_1 + x_2 \geq 0\}$, $L_2^+ = \{(x_1, x_2) : \; x_1 + 3x_2 \geq 0\}$. При этом двойственный конус A^* в координатах g_1, g_2 представляется пересечением полупространств $L_{*1}^+ = \{g_1 - 2g_2 \leq 0\}$ и $L_{*2}^+ = \{3g_1 - g_2 \geq 0\}$, см. рис. 1.

Случай $p = 1$. При этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$. Единичная сфера в $\mathcal{X}^*$ представляет собой квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, а его фрагмент, множество A_1^*, показано на рис. 2 жирной линией.

Ввиду кусочной линейности A_1^* формулу представления (3) можно в данном случае переписать в виде

$$f(X) = \min\{g^1(X), g^2(X), g^3(X)\},$$

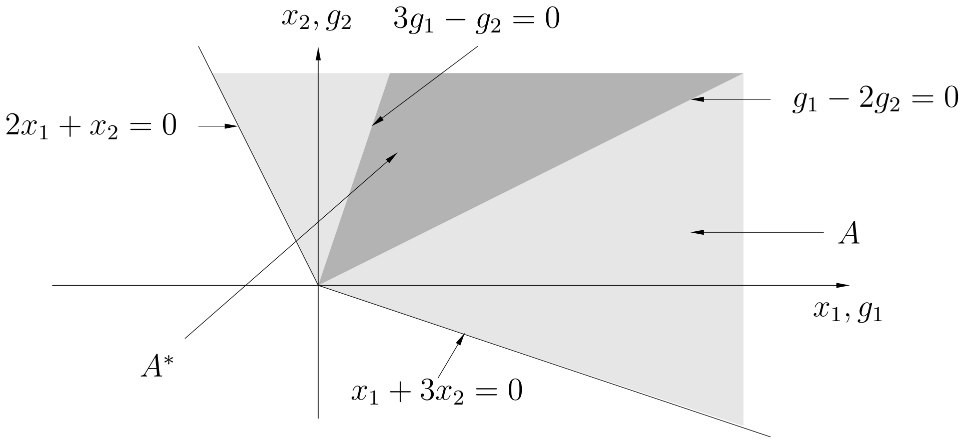

Рис. 1: Конусы A и A^*

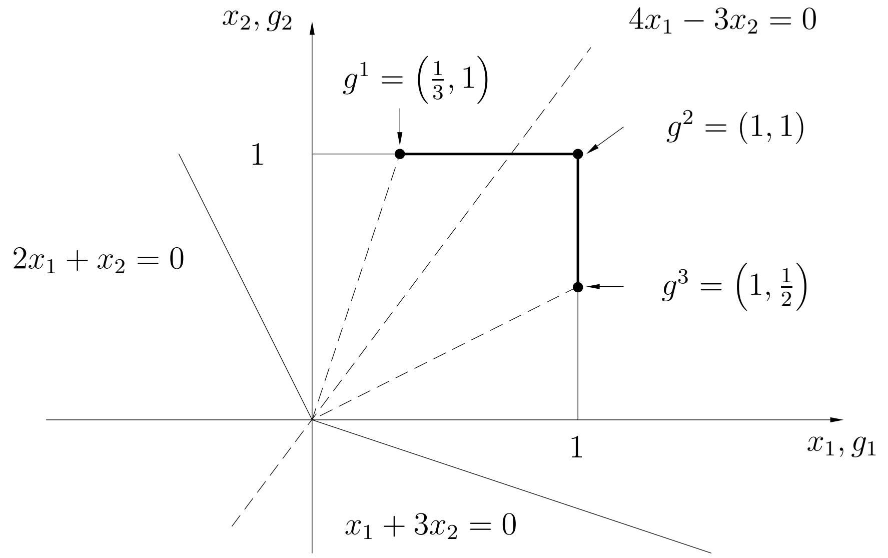

Рис. 2: Случай $p = 1$

где $g^1 = (1/3, 1)$, $g^2 = (1, 1)$, $g^3 = (1, 1/2)$. В результате получаем формулу для вычисления f в виде

$$f(X) = \begin{cases} g^3(X) = x_1 + (1/2)x_2, & 4x_1 - 3x_2 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \\ g^1(X) = (1/3)x_1 + x_2, & 4x_1 - 3x_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0 \\ g^2(X) = x_1 + x_2 & x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

На рис. 3 заливкой выделены области $\mathcal{X}$, в которых "работают" функционалы g^1, g^2 и g^3.

Вычисляя

$$f(I) = \inf_{g \in A_1^*} (g_1 + g_2) = g^1(I) = 4/3$$

и

$$f(-I) = \inf_{g \in A_1^*} (-g_1 - g_2) = -\sup_{g \in A_1^*} (g_1 + g_2) = g^2(-I) = -2,$$

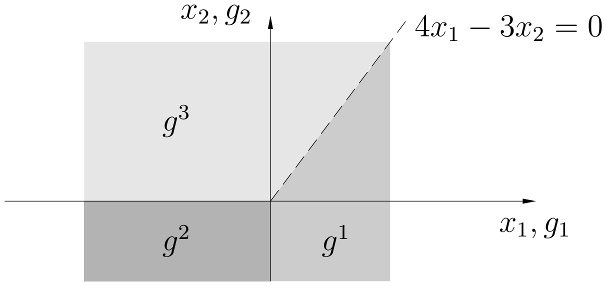

Рис. 3: Области вычисления f, $p = 1$

получаем выражение для детерминированного эквивалента в случае нормы $\|\cdot\|_1$:

$$c(X) = \begin{cases} (3/4)f(X), & X \in A \\ (1/2)f(X), & X \in A^c \end{cases}$$

Случай $p = \infty$. При этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$. Множество A_1^* выделено на рис. 4 жирной линией.

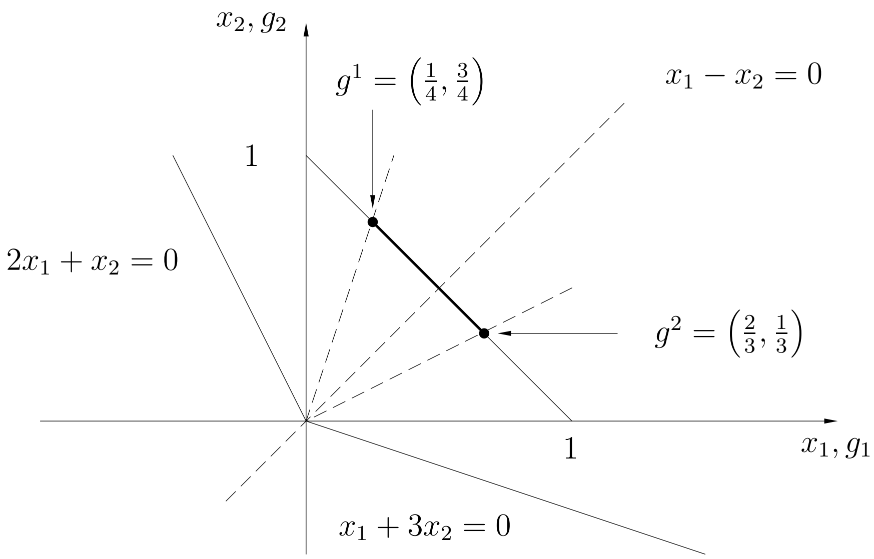

Рис. 4: Случай $p = \infty$

Ввиду линейности множества A_1^* формула вычисления функционала (3) приобретает вид

$$f(X) = \min\{g^1(X), g^2(X)\},$$

где $g^1 = (1/4, 3/4)$, $g^2 = (2/3, 1/3)$ показаны на рис. 4. Нетрудно убедиться в том, что линией раздела областей влияния функционалов g^1, g^2 является прямая $x_1 - x_2 = 0$, так что

$$f(X) = \begin{cases} g^1(X) = (1/4)x_1 + (3/4)x_2, & x_1 \geq x_2 \\ g^2(X) = (2/3)x_1 + (1/3)x_2, & x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

В частности, $f(I) = 1$ и $f(-I) = -1$, так что функционал f при $p = \infty$ уже является детерминированным эквивалентом.

Случай $p = 2$. При этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$. Множество A_1^* выделено на рис. 5 жирной линией.

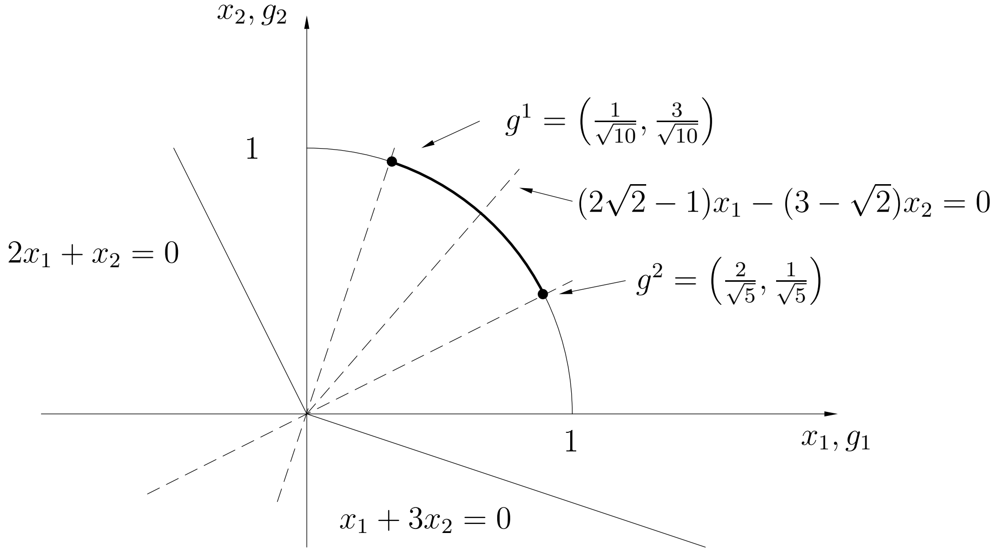

Рис. 5: Случай $p = 2$

Формула вычисления функционала (3) приобретает вид

$$f(X) = \begin{cases} g^1(X) = \frac{x_1+3x_2}{\sqrt{10}}, & (2\sqrt{2}-1)x_1 - (3-\sqrt{2})x_2 \geq 0,\ 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ g^2(X) = \frac{2x_1+x_2}{\sqrt{5}}, & (2\sqrt{2}-1)x_1 - (3-\sqrt{2})x_2 \leq 0,\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ g^{3,X}(X) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & 3x_1 - x_2 \leq 0,\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

где $g^1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $g^2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ показаны на рис. 5. В последней строке значение f производится с помощью функционала $g^{3,X}$, который изображается на рис. 5 вектором

$$g^{3,X} = -\frac{X}{\|X\|_2},$$

по направлению противоположным X.

Сферы влияния ветвей задания функционала f показаны на рис. 6.

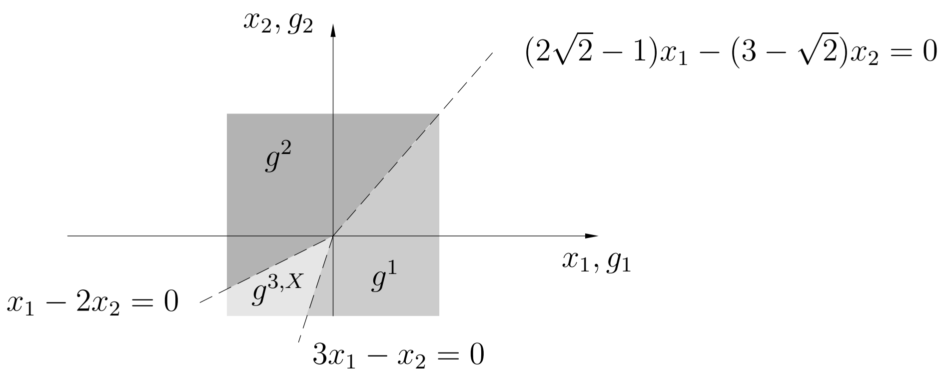

Рис. 6: Области вычисления f, $p = 2$

Для вычисления детерминированного эквивалента заметим, что $f(I) = g^1(I) = 4/\sqrt{10}$ и $f(-I) = g^{3,-I}(-I) = -\sqrt{2}$, так что

$$c(X) = \begin{cases} 0.25\sqrt{10}f(X), & X \in A \\ f(X)/\sqrt{2}, & X \in A^c \end{cases} \tag{7}$$

Детерминированный эквивалент в окончательной форме вычисляется комбинацией формул (6) и (7). $\diamond$

Пример 2 Рассмотрим более простой пример с множеством приемлемых рисков в виде полупространства $A = \{(x_1, x_2): \ x_1 + 3x_2 \geq 0\}$, см. рис. 7. Двойственный конус A^* состоит в данном случае из единственного луча, порожденного вектором $(1, 3)$.

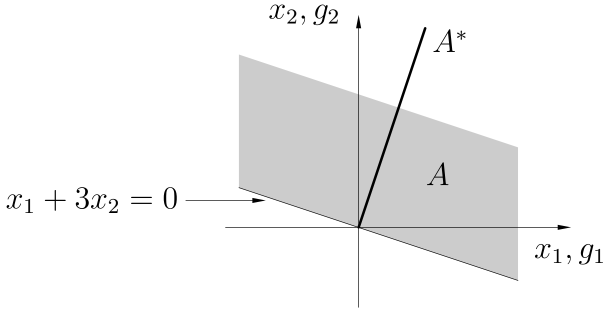

Рис. 7: Множество приемлемых рисков A в примере 2

Случай $p = \infty$. При этом $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$, и A_1^* состоит из единственного функционала, представленного вектором $g = (1/4, 3/4)$, см. рис. 8

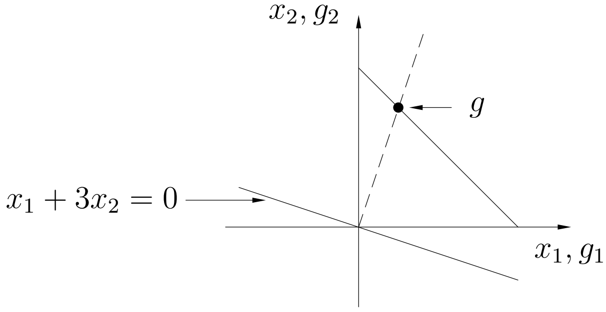

Рис. 8: Множество A_1^* при $p = \infty$

Значения этого функционала совпадают с математическим ожиданием относительно вероятностной меры Q, заданной соотношениями $Q(\omega_1) = 1/4$, $Q(\omega_2) = 3/4$, так что $f(X) = g(X) = (x_1 + 3x_2)/4 = \mathbf{E}_Q X$. Указанная мера риска является когерентной и совпадает со своим детерминированным эквивалентом.

Случай $p = 1$. Здесь $\| \cdot \|_* = \| \cdot \|_\infty$ и A_1^* состоит из единственного функционала, представленного вектором $g = (1/3, 1)$, см. рис. 9.

Значения обобщенной когерентной меры риска вычисляются по формуле $f(X) = (1/3)x_1 + x_2$. Отсюда $f(I) = 4/3$ и $f(-I) = -4/3$, так что детерминированный эквивалент принимает вид $d(X) = (3/4)f(X)$.

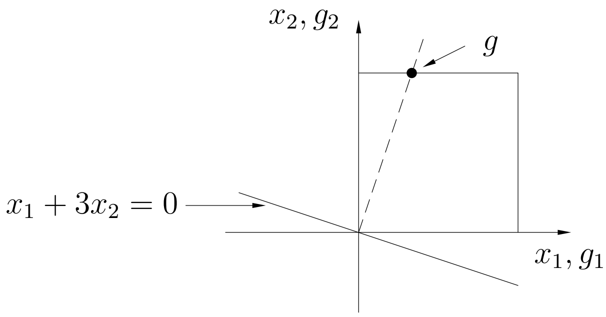

Рис. 9: Множество A_1^* при $p = 1$

Случай $p = 2$. Здесь $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$ и A_1^* состоит из единственного функционала, представленного вектором $g = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, см. рис. 10.

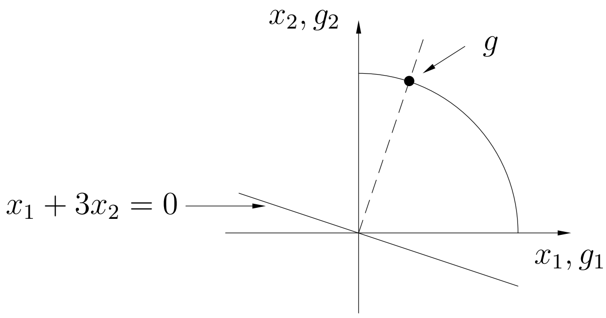

Рис. 10: Множество A_1^* при $p = 2$

Значения обобщенной когерентной меры риска вычисляются по формуле

$$f(X) = \frac{x_1 + 3x_2}{\sqrt{10}}\,.$$

Отсюда $f(I) = 4/\sqrt{10}$ и $f(-I) = -4/\sqrt{10}$, так что детерминированный эквивалент принимает вид $d(X) = (\sqrt{10}/4)f(X)$.

Немного обобщая, рассмотрим множество приемлемых рисков в виде полупространства $x_1 + ax_2 \geq 0$, где $a > 0$. Множество A_1^* при любой норме $\|\cdot\|$ состоит из единственного элемента g, а мера риска f и детерминированный эквивалент d вычисляются следующим образом.

Случай $p = \infty$. Здесь $g = (\frac{1}{1+a}, \frac{a}{1+a})$ и

$$f(X) = c(X) = \frac{x_1 + ax_2}{1 + a} = \mathbf{E}_Q X\,,$$

где вероятностная мера Q представлена вектором g.

Случай $p = 1$. При $a \geq 1$ имеем $g = (\frac{1}{a}, 1)$, $f(X) = x_1/a + x_2$, $f(I) = (1 + a)/a$ и

$$c(X) = \frac{x_1 + ax_2}{1 + a}.$$

При $a \leq 1$ получаем $g = (1, a)$, $f(X) = x_1 + ax_2$, $f(I) = 1 + a$ и вновь

$$c(X) = \frac{x_1 + ax_2}{1 + a}.$$

Случай $p = 2$. Имеем $g = \frac{(1,a)}{\sqrt{1+a^2}}$, $f(X) = \frac{x_1+ax_2}{\sqrt{1+a^2}}$, $f(I) = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$ и

$$c(X) = \frac{x_1 + ax_2}{1+a}.$$

Отметим, что в случае, когда множество приемлемых рисков является полуплоскостью $x_1 + ax_2 \geq 0$, детерминированный эквивалент при всех p совпадает с математическим ожиданием относительно вероятностной меры $Q = (\frac{1}{1+a}, \frac{a}{1+a})$. $\diamond$

Список литературы

[1] Новоселов А.А.(2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102 с.

[2] Новоселов А.А.(2006) Представление предпочтений на множестве рисков вещественными функционалами. *Наст. сб.*, ИВМ СО РАН, Красноярск.

[3] Новоселов А.А. (2004) Канонические представления полных и частичных предпочтений. *Труды III Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам.* Красноярск, ИВМ СО РАН, с. 214-225.

[4] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[5] Artzner, P., Delbaen F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

[6] Jarrow R., Purnanandam A. (2005) A generalized coherent risk measure: The firm's perspective. *Finance Research Letters*, **2**, 23-29.

[7] Новоселов А.А.(2005) Обобщенные когерентные меры риска. *Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам* Красноярск: изд-во "Гротеск", т.1, с. 325-339.