ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ РИСКОВ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

А.А. Новоселов[1]
[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН*
E-mail: anov@icm.krasn.ru

Аннотация

В работе рассматривается проблема аппроксимации функционала, представляющего отношение предпочтения на множестве вероятностных распределений, в условиях дефицита информации о предпочтениях. Получены теоремы о представлении полных и частичных предпочтений функционалами и семействами функционалов; исследована структура разбиений пространства распределений, порождаемая предпочтениями; описана процедура пополнения предпочтений в терминах представляющих семейств, приведены примеры применения результатов.
Ключевые слова и фразы: вероятностное распределение, полунепрерывное предпочтение, стохастическое доминирование, представление функционалами

1 Введение

Принятие рациональных решений в условиях риска можно формализовать в виде поиска наилучшего вероятностного распределения (риска) на заданном множестве рисков [1]. При этом сравнение распределений осуществляется посредством индивидуального отношения предпочтения, заданного на множестве рисков.

Отношение предпочтения описывает качественную структуру индивидуальных представлений о рациональности решений. Для построения эффективных алгоритмов решения соответствующих математических задач необходимо представить эти задачи в виде, подходящем для использования алгоритмов оптимизации. Эта цель достигается представлением отношений предпочтения вещественными функционалами и семействами функционалов. В работе [2] иссследована проблема представления полных и частичных предпочтений каноническими функционалами.

В настоящей работе продолжено изучение полных и частичных предпочтений на множестве рисков, начатое в [2]. Вводится понятие предпочтения, полунепрерывного относительно частичного порядка (стохастического доминирования), приведены примеры разрывных предпочтений. Исследуется структура фактор-множества, порожденного на множестве рисков полунепрерывным предпочтением. Доказана теорема о представлении полунепрерывного предпочтения вещественным функционалом.

Для частичных предпочтений получено представление семейством вещественных функционалов, исследовано строение соответствующего фактор-множества на множестве рисков, описана процедура пополнения предпочтений.

В параграфе 2 для справки приведены основные сведения о бинарных отношениях и вероятностных распределениях. В параграфе 3 описаны полные и частичные предпочтения и намечены пути их представления вещественными функционалами.

Параграф 4 посвящен отношениям на множестве вероятностных распределений (рисков). Здесь, в частности, вводится понятие регулярного предпочтения. В параграфе 5 приведены основные результаты работы — теоремы о представлении полных и частичных регулярных предпочтений.

2 Предварительные сведения и обозначения

2.1 Бинарные отношения

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное множество. *Разбиением* T множества $\mathcal{X}$ называется совокупность непустых, попарно непересекающихся множеств $T = \{K_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, для которых выполняется $\sum_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \mathcal{X}$. Разбиение T называется *измельчением* разбиения S, если для всякого $A \in T$ найдется $B \in S$ такое, что $A \subseteq B$. При этом S называется также *укрупнением* T.

Бинарным отношением Q на $\mathcal{X}$ называется произвольное подмножество в декартовом произведении $\mathcal{X}$ на себя: $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Для отношения Q определяются *транспонированное* отношение $Q^T = \{(x,y) :\ (y,x) \in Q\}$, а также *симметричная* $Q^s = Q \cap Q^T$ и *асимметричная* $Q^a = Q \setminus Q^s$ части. Пусть Q, R — два отношения на $\mathcal{X}$, их композиция $Q \circ R$ определяется равенством $Q \circ R = \{(x,y) :\ \exists z \in \mathcal{X}, (x,z) \in Q,\ (z,y) \in R\}$. Говорят, что R является *продолжением* Q (или Q является *сужением* R), если $Q^s \subseteq R^s$ и $Q^a \subseteq R^a$. Множество $I_{\mathcal{X}} = \{(x,x),\ x \in \mathcal{X}\}$ называется *диагональю* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, оно задает отношение *равенства* на $\mathcal{X}$. Отношение Q на $\mathcal{X}$ называется *рефлексивным*, если $I_{\mathcal{X}} \subseteq Q$; *симметричным*, если $Q = Q^T$; *транзитивным*, если $Q \circ Q \subseteq Q$; *антисимметричным*, если $Q \cap Q^T \subseteq I_{\mathcal{X}}$; *полным*, если $Q \cup Q^T = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Общей частью двух отношений Q, R называется отношение $Q \otimes R = (Q^s \cap R^s) + (Q^a \cap R^a)$. Это понятие естественно распространяется на произвольное семейство отношений Q_λ, $\lambda \in \Lambda$:

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q^s_\lambda + \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q^a_\lambda.$$

Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение Q на $\mathcal{X}$ называется отношением *эквивалентности*. Для отношения эквивалентности факт включения $(x,y) \in Q$ принято также обозначать $x \sim y$. Отношение эквивалентности порождает разбиение $\mathcal{X}$ на непересекающиеся классы эквивалентности

$$\mathcal{X} = \sum_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda.$$

Здесь $x, y \in K_\lambda$ (при некотором $\lambda \in \Lambda$) $\Leftrightarrow$ $x \sim y$. Совокупность классов эквивалентности называется фактор-множеством $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности $\sim$ и обозначается $\widetilde{\mathcal{X}} = \widetilde{\mathcal{X}}_Q = \{K_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Если отношение эквивалентности R является продолжением отношения эквивалентности Q, то есть, $Q \subseteq R$, то фактор-множество $\widetilde{\mathcal{X}}_Q$ является измельчением фактор-множества $\widetilde{\mathcal{X}}_R$. В частности, наименьшее (по включению) отношение эквивалентности $I_{\mathcal{X}}$ порождает самое подробное разбиение $\mathcal{X}$ на одноэлементные классы эквивалентности. Наибольшее отношение эквивалентности $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ порождает разбиение с единственным классом эквивалентности, совпадающим со всем $\mathcal{X}$.

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение Q на $\mathcal{X}$ называется отношением (частичного) *порядка*; включение $(x, y) \in Q$ в этом случае обозначается также $x \leq y$. Симметричная часть отношения порядка совпадает с диагональю $I_{\mathcal{X}}$, а асимметричная часть представляет отношение строгого порядка $<$. Если отношение порядка обладает свойством полноты, то порядок называется *линейным*.

Замечание 1 В дальнейшем для конкретных видов отношений мы будем использовать двойную систему обозначений: латинская буква (с индексами) для подмножества декартова произведения, и специальный символ для данного отношения, например, $\sim$ для отношения эквивалентности. $\diamond$

2.2 Вещественные распределения

Обозначим $\mathbf{R}$ множество вещественных чисел, $\mathcal{B}$ — борелевскую σ-алгебру на $\mathbf{R}$. *Вероятностным распределением* на измеримом пространстве $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ называется любая неотрицательная σ-аддитивная функция множества P, заданная на $\mathcal{B}$ и удовлетворяющая условию $P(\mathbf{R}) = 1$. Вероятностное распределение называется *ограниченным*, если существуют a, b такие, что $-\infty < a < b < \infty$ и $P([a, b]) = 1$. Совокупность всех ограниченных распределений на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ будем обозначать $\mathcal{P}$.

Если задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, то вероятностные распределения на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ могут порождаться случайными величинами, то есть, измеримыми отображениями $X : \Omega \to \mathbf{R}$. Случайная величина X порождает распределение P_X по правилу $P_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$. В частности, ограниченное распределение порождается почти наверное ограниченной случайной величиной X: $\mathbf{P}(|X| < \infty) = 1$. В настоящей работе конкретный механизм порождения распределений на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ не используется, и мы будем рассматривать только распределения, как таковые.

Нижней $l(P)$ и *верхней* $u(P)$ *границами* распределения $P \in \mathcal{P}$ называются величины

$$l(P) = \sup\{a \in \mathbf{R} : \ P(-\infty, a]) = 0\}, \quad u(P) = \inf\{b \in \mathbf{R} : \ P[b, \infty)) = 0\}.$$

Отрезок $[l(P), u(P)]$ называется *носителем* распределения P.

Каждое распределение $P \in \mathcal{P}$ может быть может быть описано различными способами. Выше мы упоминали об описании распределений *случайными величинами*; такое описание не всегда удобно, поскольку каждое распределение можно представить случайными величинами, вообще говоря, не единственным образом. Другим способом описания распределения является *функция распределения*. Для распределения $P \in \mathcal{P}$ его функцией распределения называется функция $F = F_P : \mathbf{R} \to [0, 1]$, задаваемая посредством

$$F_P(x) = P((-\infty, x]), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Такое представление является уже взаимно-однозначным, каждому распределению $P \in \mathcal{P}$ соответствует единственная функция распределения F_P. Еще одним способом представления распределения P является *дополнительная функция распределения* $S = S_P$, задаваемая соотношением

$$S_P(x) = P\left((x, \infty)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ясно, что $F_P(x)+S_P(x) = 1$ при всяком $x \in \mathbf{R}$, и представление распределений дополнительными функциями распределения также взаимно-однозначно. Можно упомянуть также взаимно-однозначные способы представления распределений из $\mathcal{P}$ *характеристическими функциями* и *производящими функциями моментов*. Для наших целей достаточно будет представления распределений функциями распределения.

В дальнейшем будем считать, что совокупность $\mathcal{P}$ составлена из функций распределения, то есть, неубывающих функций $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$, обладающих предельными значениями $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Ввиду ограниченности распределений из $\mathcal{P}$ для каждой такой функции распределения определены конечные верхняя и нижняя границы

$$l(F) = \sup\{a \in \mathbf{R} :\ F(a) = 0\}, \quad u(F) = \inf\{b \in \mathbf{R} :\ F(b) = 1\}.$$

совпадающие с соответствующими границами порождающего распределения P. Для функции распределения $F \in \mathcal{P}$ *обратная функция распределения* F^{-1} определяется равенством

$$F^{-1}(v) = \sup\{x :\ F(x) \leq v\},\ v \in [0, 1),\ \text{и}\ F^{-1}(1) = u(F).$$

Средним значением или *математическим ожиданием* функции распределения $F \in \mathcal{P}$ называется интеграл

$$\mathbf{E}F = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{l(F)}^{u(F)} x\, dF(x).$$

Ясно, что $l(F) \leq \mathbf{E}F \leq u(F)$. Математическое ожидание можно выразить через обратную функцию распределения посредством

$$\mathbf{E}F = \int_0^1 F^{-1}(v)\, dv. \tag{1}$$

Простейшим из вещественных распределений является *вырожденное распределение* с функцией распределения

$$W_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Точка a называется *точкой вырождения* распределения W_a. Совокупность всех вырожденных распределений обозначим $\mathcal{W} = \{W_a,\ a \in \mathbf{R}\}$. Ясно, что $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$ и $l(W_a) = u(W_a) = \mathbf{E}W_a = a$, $a \in \mathbf{R}$. Отметим также, что для произвольного невырожденного распределения $F \in \mathcal{P}$ справедливо $l(F) < u(F)$.

3 Отношения предпочтения

3.1 Полное предпочтение

Полное транзитивное отношение Q на $\mathcal{X}$ называется отношением *предпочтения.* Факт включения $(x, y) \in Q$ обозначается в этом случае также $x \preceq y$. Содержательно это отношение интерпретируется, как "x не лучше y" или "y не хуже x". Симметричная часть Q^s отношения предпочтения обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то есть, является отношением эквивалентности. Асимметричная часть Q представляет отношение строгого предпочтения, которое будем обозначать $\prec$. Фактор-множество $\mathcal{X}$ по симметричной части предпочтения $\preceq$ также обозначим $\widetilde{\mathcal{X}}$. Отношение предпочтения $\preceq$ естественным образом порождает на фактор-множестве $\widetilde{\mathcal{X}}$ линейный порядок. Если $K, L \in \widetilde{\mathcal{X}}$ и $K \neq L$, то для произвольных $x \in K$, $y \in L$ выполняется одно из соотношений $x \prec y$, $y \prec x$; классы полагаются упорядоченными соотношением $K < L$ или $L < K$, соответственно.

Таким образом, произвольное отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ порождает разбиение $\mathcal{X}$ на классы эквивалентности, причем множество классов оказывается линейно упорядоченным. Оказывается, верно и обратное: произвольное разбиение $\mathcal{X}$ на непересекающиеся непустые множества с линейным порядком на совокупности элементов разбиения порождает на $\mathcal{X}$ отношение предпочтения. Именно, справедлива

Лемма 1 *Пусть совокупность подмножеств $\widetilde{\mathcal{X}} = \{K_\lambda \subseteq \mathcal{X},\ \lambda \in \Lambda\}$ такова, что $K_\lambda \neq \emptyset$ при всех $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{X} = \sum_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ и на $\widetilde{\mathcal{X}}$ задан линейный порядок $\leq$. Тогда на $\mathcal{X}$ порождается отношение предпочтения. Если $x, y \in \mathcal{X}$ принадлежат одному классу в соответствии с разбиением $\widetilde{\mathcal{X}}$, то полагаем $x \sim y$. Если же $x \in K$, $y \in L$ и $K \neq L$, то полагаем $x \prec y$ или $y \prec x$ при $K < L$ и $L < K$, соответственно.*

Лемма 1 дает механизм задания отношения предпочтения. Другой механизм для достижения той же цели состоит в задании вещественного функционала $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Сформулируем этот результат в виде леммы, доказательство которой состоит в тривиальной проверке полноты и транзитивности получающегося отношения.

Лемма 2 *Пусть задан функционал $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Тогда отношение $\preceq$ на $\mathcal{X}$, заданное посредством*

$$x \preceq y \iff f(x) \leq f(y) \tag{2}$$

является отношением предпочтения.

Безусловное обращение этой леммы невозможно. Поиск достаточных условий справедливости обращения составляет одну из целей настоящей работы.

Для дальнейшего обозначим Q_f^s и Q_f^a симметричную и асимметричную части предпочтения, порожденного функционалом f, соответственно:

$$Q_f^s = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} :\ f(x) = f(y)\}, \quad Q_f^a = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} :\ f(x) < f(y)\}. \tag{3}$$

3.2 Частичное предпочтение

Рефлексивное транзитивное отношение Q на $\mathcal{X}$ называется отношением *частичного предпочтения.* Поскольку всякое полное отношение является рефлексивным, предпочтение представляет собой частный случай частичного предпочтения. Факт включения $(x, y) \in Q$ будем записывать также в виде $x \preceq y$. Асимметричная часть Q^a представляет отношение *строгого частичного предпочтения* $\prec$. Частичный порядок также является частным случаем частичного предпочтения.

Симметричная часть Q^s частичного предпочтения является рефлексивным, симметричным, транзитивным отношением, то есть, отношением эквивалентности. Соответствующее фактор-множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ оказывается частично упорядоченным по следующему правилу: для классов эквивалентности $X, Y \in \widetilde{\mathcal{X}}$ полагаем $X < Y$, если $x \prec y$ при некоторых (и, следовательно, при всех) $x \in X,\ y \in Y$. Таким образом, задание частичного предпочтения на $\mathcal{X}$ порождает разбиение $\mathcal{X}$ на классы эквивалентности, совокупность которых частично упорядочена. Оказывается, верно и обратное.

Лемма 3 *Пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ — разбиение $\mathcal{X}$ на непустые непересекающиеся множества, причем на $\widetilde{\mathcal{X}}$ задан частичный порядок $\leq$. Тогда на $\mathcal{X}$ порождается отношение частичного предпочтения между элементами $x \in X,\ y \in Y$ по правилу: $x \sim y$, если $X = Y$, $x \prec y$, если $X < Y$ и x, y не сравнимы в смысле предпочтения $\preceq$, если X, Y не сравнимы в смысле частичного порядка $\leq$.*

Пусть Q, R — два частичных предпочтения на $\mathcal{X}$ и R является продолжением Q. При продолжении симметричной части частичного предпочтения происходит *укрупнение* классов эквивалентности. При продолжении асимметричной части частичного предпочтения состав фактор-множества не изменяется, но происходит продолжение частичного порядка на фактор-множестве.

Опишем один способ задания частичного предпочтения. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство функционалов, заданных на $\mathcal{X}$. Для каждого $f \in \mathcal{M}$ сформируем симметричную и асимметричную части предпочтения по формулам (3). После этого образуем симметричную $Q^s_{\mathcal{M}}$, асимметричную $Q^a_{\mathcal{M}}$ части, и отношение $Q_{\mathcal{M}}$ в виде

$$Q^s_{\mathcal{M}} = \bigcap_{f \in \mathcal{M}} Q^s_f, \quad Q^a_{\mathcal{M}} = \bigcap_{f \in \mathcal{M}} Q^a_f, \quad Q_{\mathcal{M}} = Q^s_{\mathcal{M}} + Q^a_{\mathcal{M}}. \tag{4}$$

Лемма 4 *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство вещественных функционалов, заданных на $\mathcal{X}$. Тогда отношение $Q_{\mathcal{M}}$, заданное посредством (3) — (4), является частичным предпочтением на $\mathcal{X}$.*

Доказательство леммы сводится к элементарной проверке рефлексивности и транзитивности отношения (4) с использованием (3). $\diamond$

Обращение этой леммы для регулярных частичных предпочтений представлено ниже в параграфе 5.2 (теорема о представлении частичного предпочтения).

Лемма 4 дает инструмент пополнения частичного предпочтения. Именно, если $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, то переход от задающего семейства функционалов $\mathcal{M}$ к более узкому семейству $\mathcal{N}$ соответствует продолжению частичного предпочтения. В крайнем случае, когда семейство $\mathcal{N}$ состоит из единственного элемента, получаем продолжение до полного отношения предпочтения.

4 Отношения на множестве распределений

4.1 Порядок стохастического доминирования

На множестве распределений $\mathcal{P}$ можно задать частичный порядок $\leq$, называемый *стохастическим доминированием.* Говорят, что функция распределения G стохастически доминирует функцию распределения F, что обозначается $F \leq G$, если

$$F(x) \geq G(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Такое название оправдывается тем обстоятельством, что при выполнении отношения $F \leq G$ найдутся случайные величины X с функцией распределения F и Y с функцией распределения G такие, что $X \leq Y$ почти наверное. В частности, как нетрудно заметить, стохастическое доминирование $F \leq G$ можно эквивалентным образом определить в терминах обратных функций распределения

$$F^{-1}(v) \leq G^{-1}(v),\ v \in [0,1]. \tag{5}$$

Отметим, что для произвольной невырожденной функции распределения $F \in \mathcal{P}$ выполняется $W_{l(F)} < F < W_{u(F)}$.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ — некоторое множество функций распределения. Тогда определены точные нижняя и верхняя грани

$$\underline{\mathcal{F}} = \inf \mathcal{F},\ \ \overline{\mathcal{F}} = \sup \mathcal{F}$$

этого множества. Если носители распределений из $\mathcal{F}$ равномерно ограничены, то эти грани представляют собой функции распределения и вычисляются по формулам

$$\underline{\mathcal{F}}(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}} F(x),\ \ \overline{\mathcal{F}}(x) = \inf_{F \in \mathcal{F}} F(x),\ \ x \in \mathbf{R}.$$

Пример 1 Рассмотрим множество $\mathcal{P}(a,b)$ всех распределений из $\mathcal{P}$, носители которых содержатся в отрезке $[a,b]$. Нетрудно убедиться в том, что $\underline{\mathcal{P}(a,b)} = W_a$ и $\overline{\mathcal{P}(a,b)} = W_b$. $\diamond$

В частности, если F_n, $n = 1, 2, \ldots$ — неубывающая (невозрастающая) последовательность функций распределения с равномерно ограниченными носителями, то

$$\overline{\mathcal{F}}(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),\ \ x \in \mathbf{R} \quad \left(\underline{\mathcal{F}}(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),\ \ x \in \mathbf{R}\right),$$

соответственно. При этом

$$\overline{\mathcal{F}} = \lim_{n\to\infty} F_n \text{ и } \underline{\mathcal{F}} = \lim_{n\to\infty} F_n.$$

Всюду далее в работе будет рассматриваться множество вещественных распределений $\mathcal{P}$, снабженное частичным порядком стохастического доминирования $\leq$.

4.2 Регулярные предпочтения

Далее в работе будем рассматривать (частичные и полные) отношения предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{P}$, являющиеся продолжением стохастического доминирования. Последнее, в частности, означает, что для функций распределения $F, G \in \mathcal{P}$ соотношение $F < G$ влечет $F \prec G$.

Сначала рассмотрим простой пример отношения предпочтения на множестве распределений $\mathcal{P}$.

Пример 2 Зададим на $\mathcal{P}$ функционал математического ожидания $f(F) = \mathbf{E}F$, $F \in \mathcal{P}$. По лемме 2 этот функционал порождает на $\mathcal{P}$ отношение предпочтения $\preceq$. Из (1), (5) вытекает, что построенное предпочтение является продолжением стохастического доминирования. Симметричная часть этого предпочтения (эквивалентность) устроена таким образом, что $F \sim G$ означает $\mathbf{E}F = \mathbf{E}G$. Каждый класс эквивалентности состоит из распределений с одинаковыми математическими ожиданиями. Фактор-множество $\widetilde{\mathcal{P}}$ состоит из классов эквивалентности K_λ, которые можно индексировать значением математического ожидания элементов этого класса:

$$K_\lambda = \{F \in \mathcal{P} :\ \mathbf{E}F = \lambda\},\ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

При этом порядок, порожденный на фактор-множестве, легко описывается в терминах индексов: $K_\lambda < K_\mu \iff \lambda < \mu$. $\diamond$

Введем понятие полунепрерывных отношений предпочтения.

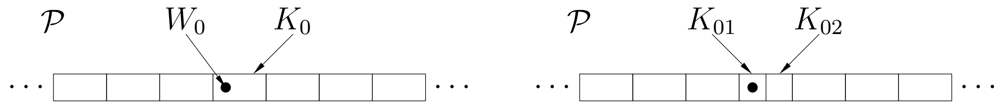
Определение 1 Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{P}$ называется *полунепрерывным снизу*, если для произвольной невозрастающей последовательности функций распределения $F_n \in \mathcal{P}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей соотношениям $G \preceq F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ выполняется $G \preceq \lim_{n\to\infty} F_n$. Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{P}$ называется *полунепрерывным сверху*, если для произвольной неубывающей последовательности функций распределения $F_n \in \mathcal{P}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей соотношениям $F_n \preceq G$, $n = 1, 2, \ldots$ выполняется $\lim_{n\to\infty} F_n \preceq G$. $\diamond$

Для иллюстрации содержательности введенных понятий построим примеры разрывных предпочтений.

Пример 3 Рассмотрим отношение предпочтения $\preceq$ из примера 2 и порожденное им фактор-множество $\widetilde{\mathcal{P}}$. Классы эквивалентности имеют вид, описанный в (6), и упорядочены в соответствии со значением индекса λ. В класс K_0 входят все распределения с нулевым средним, в частности, вырожденное распределение W_0. Разобьем этот класс на две непустые части $K_0 = K_{01} + K_{02}$ так, чтобы $W_0 \in K_{01}$. Удалим из $\widetilde{\mathcal{P}}$ класс K_0 и добавим K_{01}, K_{02}. Вновь образованная совокупность множеств $V = \{K_\lambda,\ \lambda \neq 0\} + K_{01} + K_{02}$ является разбиением $\mathcal{P}$. Зададим в ней линейный порядок, сохранив отношение для элементов K_λ, $\lambda \neq 0$, и доопределив порядок для вновь добавленных элементов следующим образом

$$K_\lambda < K_{01} < K_{02} < K_\mu \text{ при } \lambda < 0 < \mu. \tag{7}$$

Коррекция разбиения $\mathcal{P}$ проиллюстрирована на рис. 1.



а) исходное разбиение   б) новое разбиение

Рис. 1: Коррекция разбиения

Теперь V представляет собой линейно упорядоченное разбиение $\mathcal{P}$, так что, по лемме 1, оно порождает на $\mathcal{P}$ отношение предпочтения. Покажем, что это отношение не является полунепрерывным снизу. Зафиксируем произвольную функцию распределения G из класса K_{02} и рассмотрим убывающую последовательность вырожденных функций распределения $\{W_{1/n},\ n = 1, 2, \ldots\}$. При этом $\lim_{n\to\infty} F_n = W_0$ и $W_0 \prec G \preceq F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, что нарушает полунепрерывность этого отношения предпочтения снизу.

Пример предпочтения, не являющегося полунепрерывным сверху, строится аналогично. Следует лишь немного изменить порядок на разбиении V, задав его выражением

$$K_\lambda < K_{02} < K_{01} < K_\mu \text{ при } \lambda < 0 < \mu. \tag{8}$$

вместо (7) и рассмотреть возрастающую последовательность вырожденных функций распределения $F_n = W_{-1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Теперь $\lim_{n\to\infty} F_n = W_0$ и $F_n \preceq G \prec W_0$, $n = 1, 2, \ldots$, что и означает отсутствие полунепрерывности сверху. $\diamond$

Теперь введем понятие регулярного предпочтения.

Определение 2 (Частичное или полное) отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{P}$ называется *регулярным* (относительно стохастического доминирования $\leq$), если $\preceq$ является продолжением $\leq$ и полунепрерывно сверху и снизу. $\diamond$

5 Представление регулярных предпочтений

5.1 Полные предпочтения

Определение 3 Скажем, что функционал $f : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ *представляет* отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{P}$, если $F \preceq G \iff f(F) \le f(G)$. Функционал f называется *каноническим*, если $f(W_a) = a,\ a \in \mathbf{R}$. $\diamond$

Теорема 1 (представление ПП) *Пусть полное предпочтение $\preceq$ на $\mathcal{P}$ регулярно относительно стохастического доминирования. Тогда найдется представляющий его канонический вещественный функционал f.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 5 *Пусть полное предпочтение $\preceq$ на $\mathcal{P}$ регулярно относительно стохастического доминирования. Тогда в каждом классе эквивалентности $K \in \widetilde{\mathcal{P}}$ найдется единственное вырожденное распределение.*

Доказательство. Для вырожденных распределений из $a < b$ вытекает $W_a < W_b$, что для регулярного предпочтения влечет $W_a \prec W_b$, так что в каждом классе эквивалентности не может быть более одного вырожденного распределения. Докажем существование. Зафиксируем произвольный класс эквивалентности $K \in \widetilde{\mathcal{P}}$ и произвольный элемент $H \in K$. Если $H \in \mathcal{W}$, то существование вырожденного распределения доказано. Если же $H \notin \mathcal{W}$, то найдем вырожденное распределение, эквивалентное H. Для этого рассмотрим нижний $\underline{W}(H) = \{F \in \mathcal{W} :\ F \preceq H\}$ и верхний $\overline{W}(H) = \{F \in \mathcal{W} :\ H \preceq F\}$ классы вырожденных функций распределения, порожденные H. Оба класса непусты ввиду $W_{l(H)} \in \underline{W}(H)$ и $W_{u(H)} \in \overline{W}(H)$. Кроме того, они не зависят от выбора $H \in K$, поэтому можно считать, что они порождены классом K, и обозначать эти классы $\underline{W}(K), \overline{W}(K)$, соответственно. Вычислим величины

$$\underline{K} = \sup\{a :\ W_a \in \underline{W}(K)\}, \quad \overline{K} = \inf\{b :\ W_b \in \overline{W}(H)\}. \tag{9}$$

Ясно, что $\underline{K} \le \overline{K}$. Предположим, что $\underline{K} < \overline{K}$. Тогда при $\underline{K} < k < \overline{K}$, с одной стороны, $W_k \notin \underline{W}(K)$ (что эквивалентно $H \prec W_k$), с другой стороны, $W_k \notin \overline{W}(K)$ (что эквивалентно $W_k \prec H$). Полученное противоречие показывает, что $\underline{K} = \overline{K}$. Обозначим это общее значение $k = \underline{K} = \overline{K}$. Рассмотрим возрастающую последовательность вырожденных функций распределения $W_{k-1/n}$ из нижнего класса $\underline{W}(K)$. Ясно, что $W_{k-1/n} \preceq H$, так что, по полунепрерывности $\preceq$ сверху получаем $\lim_{n\to\infty} W_{k-1/n} = W_k \preceq H$. Затем рассмотрим убывающую последовательность вырожденных функций распределения $W_{k+1/n}$ из верхнего класса $\overline{W}(K)$. Для нее $H \preceq W_{k+1/n}$, так что, по полунепрерывности снизу, $H \preceq \lim_{n\to\infty} W_{k+1/n} = W_k$. Таким образом, $H \sim W_k$, тем самым $W_k \in K$, что и требовалось. Лемма доказана. $\diamond$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим фактор-множество $\widetilde{\mathcal{P}}$. По лемме 5 в каждом классе эквивалентности $K \in \widetilde{\mathcal{P}}$ найдется единственное вырожденное распределение W_a. Обозначим соответствующий класс K_a. Получим представление фактор-множества в виде $\widetilde{\mathcal{P}} = \{K_a,\, a \in \mathbf{R}\}$. Зададим функционал f следующим образом:

$$f(F) = a,\ F \in K_a,\ a \in \mathbf{R}.$$

Проверка условия представления и каноничности функционала f тривиальны. Теорема доказана. $\diamond$

5.2 Частичные предпочтения

Полное предпочтение на множестве вероятностных распределений часто недоступно для измерения. В практических задачах оно обычно бывает известно лишь частично, в виде частичного предпочтения. В настоящем параграфе изучим способ представления такого частичного предпочтения семейством функционалов.

Определение 4 Пусть $\mathcal{M} = \{f : \ \mathcal{P} \to \mathbf{R}\}$ — некоторое семейство вещественных функционалов, заданных на $\mathcal{P}$. Скажем, что это семейство *представляет* отношение Q частичного предпочтения на $\mathcal{P}$, если $Q^s = Q^s_{\mathcal{M}}$ и $Q^a = Q^a_{\mathcal{M}}$, где

$$Q^s_{\mathcal{M}} = \bigcap_{f \in \mathcal{M}} Q^s_f, \quad Q^a_{\mathcal{M}} = \bigcap_{f \in \mathcal{M}} Q^a_f, \tag{10}$$

а Q^s_f, Q^a_f определены в (3). $\diamond$

Теорема 2 (представление ЧП) *Пусть регулярное частичное предпочтение Q на $\mathcal{P}$ является сужением полного регулярного предпочтения R. Тогда найдется класс канонических функционалов $\mathcal{M} = \{f : \mathcal{P} \to \mathbf{R}\}$, представляющий это отношение предпочтения.*

Замечание 2 Отметим, что представление (10) можно трактовать следующим образом. Пара функций распределения (F, G) эквивалентна (попадает в симметричную часть отношения $Q^s_{\mathcal{M}}$), если *все* функционалы $f \in \mathcal{M}$ согласованы на этой паре в смысле $f(F) = f(G)$, $f \in \mathcal{M}$. Пара функций распределения (F, G) попадает в асимметричную часть отношения $Q^a_{\mathcal{M}}$ $(F \prec G)$, если *все* функционалы согласованы на этой паре в смысле $f(F) < f(G),\ f \in \mathcal{M}$. $\diamond$

Доказательство. Обозначим f_R канонический функционал, представляющий полное предпочтение R; существование такого функционала гарантировано теоремой 1. Для каждой пары распределений (F, G) из симметричной части Q^s рассмотрим совокупность всевозможных функционалов $f : \ \mathcal{P} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $f(F) = f(G)$. Среди всех таких функционалов выделим множество $\mathcal{M}^s_{(F,G)}$ канонических функционалов; последнее содержит f_R и, тем самым, не пусто. Из рассмотренных функционалов образуем семейство

$$\mathcal{M}^s = \bigcap_{(F,G) \in Q^s} \mathcal{M}^s_{(F,G)}.$$

Ясно, что $f_R \in \mathcal{M}^s$.

Далее, для каждой пары распределений $(F, G) \in Q^a$ рассмотрим множество функционалов f, обладающих свойством $f(F) < f(G)$ и отберем из них подмножество канонических функционалов $\mathcal{M}^a_{(F,G)}$. Последнее непусто ввиду $f_R \in \mathcal{M}^a_{(F,G)}$. Образуем семейство

$$\mathcal{M}^a = \bigcap_{(F,G)\in Q^a} \mathcal{M}^a_{(F,G)}.$$

Ясно, что $f_R \in \mathcal{M}^a$.

Определим семейство функционалов $\mathcal{M} = \mathcal{M}^s \cap \mathcal{M}^a$. Оно состоит из канонических функционалов и не пусто ввиду $f_R \in \mathcal{M}$. Проверка условия представления предпочтения Q тривиальна. $\diamond$

Замечание 3 Отметим, что представление частичного предпочтения семейством функционалов определяется не единственным образом. В доказательстве теоремы 2 построено представление частичного предпочтения *максимальным* (по включению) семейством канонических функционалов. $\diamond$

Пример 4 Стохастическое доминирование является частичным предпочтением на $\mathcal{P}$. Его представляет семейство функционалов ожидаемой полезности $\mathcal{M} = \{f_U,\, U \in \mathcal{U}\}$, где $\mathcal{U}$ — совокупность строго возрастающих вещественных функций $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, а канонический функционал f_U задается соотношением

$$f_U(F) = U^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dF(x)\right) = U^{-1}\left(\int_0^1 U(F^{-1}(v))\, dv\right),\ F \in \mathcal{P}.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [3]. $\diamond$

Список литературы

[1] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102с.

[2] Новоселов А.А. (2004) Канонические представления полных и частичных предпочтений. *Труды III Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам.* Красноярск, ИВМ СО РАН, с. 214-225.

[3] Bauerle, N., and Muller, A. (1998) Modeling and Comparing Dependencies in Multivariate Risk Portfolios. *ASTIN Bulletin*, **28**, 1, pp. 59–76.