Обобщенные когерентные меры риска

А.А. Новоселов*

Аннотация

В работе вводятся обобщенные когерентные меры риска, изучаются некоторые их свойства, доказана теорема об экстремальном представлении функционалов этого класса, приведены примеры и рассмотрены частные случаи.

1 Введение

В работе [1] было введено понятие когерентных мер риска, которое сразу получило признание в качестве полезного инструмента для задач принятия решения в условиях риска. Одновременно изучались и недостатки функционалов этого класса, в результате чего появлялись обобщения когерентных мер риска в различных направлениях. Первым таким обобщением, по-видимому, стали выпуклые меры риска [2]. Эти меры риска вместо свойств субаддитивности и положительной однородности обладают более общим свойством выпуклости.

Попытка другого обобщения предпринята в работе [3]. Здесь отмечено, что перемещение текущего риска в область приемлемых рисков может быть осуществлено не только добавлением детерминированной суммы денег ("безрисковой позиции"), как в случае когерентной меры риска, но и добавлением какого-либо рискованного актива; в качестве меры риска используется некоторая норма актива, переводящая риск на границу приемлемого множества. При этом, как отмечается в [3], может получиться и более дешевый способ избавления от риска.

К сожалению, функционалы класса, предложенного в [3], не являются представляющими функционалами для какого-либо содержательного отношения предпочтения на множестве рисков. Кроме того, эти функционалы не являются, строго говоря, обобщением когерентных мер риска. Это является следствием того факта, что функционалы этого класса тождественно равны 0 на всем множестве приемлемых рисков, то есть, они не различают между собой приемлемые риски. Этого бывает достаточно для регулирующих органов, основная цель которых — избежание неприемлемых ситуаций, близких к разорению. Однако, этого совершенно недостаточно для участников реального бизнеса, основная цель которых — выбор наилучшего решения среди приемлемых. Для решения задач такого рода необходимы меры риска, позволяющие различать между собой и приемлемые риски. Поэтому представляет интерес действительное обобщение когерентных мер риска в направлении, предложенном в работе [3].

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, email: anov@inbox.ru

В работе [4] рассматривается такое обобщение когерентных мер риска в евклидовой норме $\mathbf{R}^n$. Настоящая работа посвящена изучению общего случая произвольной нормы в $\mathbf{R}^n$. Приводится аксиоматическое описание меры риска в терминах функционалов на множестве рисков и в терминах множеств приемлемых рисков. Изучены свойства новой меры риска. Получены теоремы о представлении обобщенных когерентных мер риска, являющиеся мощным инструментом вычисления этих функционалов.

Введем необходимые обозначения. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Вероятностную меру $\mathbf{P}$ будем называть "физической мерой", и не будем жестко фиксировать ее заранее. Для простоты изложения будем считать пространство элементарных исходов конечным $|\Omega| = n$. При этом можно выбирать σ-алгебру $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = 2^\Omega$, а вероятностные меры Q на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ представлять элементами $\mathbf{R}^n$, точнее, его стандартного симплекса

$$S_n = \{Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{R}^n : \ q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0, \, q_1 + \cdots + q_n = 1\}. \qquad (1)$$

Случайной величиной X (или риском) на $(\Omega, \mathcal{A})$ называется произвольное отображение из Ω в $\mathbf{R}$ (его измеримость в данном случае гарантирована, поскольку σ-алгебра $\mathcal{A}$ охватывает всевозможные подмножества Ω). Обозначим $\mathcal{X}$ совокупность всех случайных величин на $(\Omega, \mathcal{A})$; ясно, что $\mathcal{X}$ изоморфно $\mathbf{R}^n$. Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, обозначим $X(\omega_i) = x_i, \ i = 1, \ldots, n$, и будем отождествлять случайные величины $X \in \mathcal{X}$ с векторами $X = (x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$. Введем на $\mathcal{X}$ порядок обычным образом: $X = (x_1, \ldots, x_n) \leq Y = (y_1, \ldots, y_n)$, если $x_i \leq y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Будем также использовать обозначение $X < Y$ для случая $x_i < y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Обозначим C_+ конус неотрицательных случайных величин, а C_{--} — конус отрицательных случайных величин, то есть,

$$C_+ = \{X \in \mathcal{X} : \ X \geq 0\}, \quad C_{--} = \{X \in \mathcal{X} : \ X < 0\}.$$

Определение 1 Множество A будем называть множеством приемлемых рисков, если оно является выпуклым замкнутым конусом в линейном пространстве $\mathcal{X}$ и

$$A \cap C_{--} = \emptyset, \quad C_+ \subseteq A. \qquad (2)$$

На $\mathcal{X}$, как известно, можно ввести норму многими способами, например, норма $\|\cdot\|_p$ для $1 \leq p < \infty$ задается посредством

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad (3)$$

а $\|\cdot\|_\infty$ — посредством

$$\|X\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|X\|_p = \max \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad (4)$$

Напомним [5], что отношением предпочтения $\preceq$ на множестве $\mathcal{X}$ называется произвольное полное транзитивное бинарное отношение, а мерой риска называется произвольный функционал $f : \ \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Говорят, что мера риска f представляет отношение предпочтения $\preceq$, если

$$f(X) \leq f(Y) \iff X \preceq Y \ \text{ для } \ X, Y \in \mathcal{X}. \qquad (5)$$

Работа построена следующим образом. В параграфе 2 приведено определение когерентной меры риска и рассмотрены основные свойства этих функционалов. В параграфе 3 рассматривается обобщение когерентных мер риска из работы [3], и описываются недостатки такого обобщения. Далее, в параграфе 4 предлагается обобщение когерентных мер риска и исследуются свойства такого обобщения, получена теорема о представлении обобщенных когерентных мер риска.

2 Когерентные меры риска

В работе [1] было введено понятие когерентной меры риска. Следуя работе [6], проведем изложение в терминах супермодулярных функций, которые являются эквивалентным описанием когерентных мер риска, точнее, если $\rho : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ — когерентная мера риска, то f — супермодулярная функция, связанная с ρ посредством соотношения $f(X) = -\rho(X)$ для произвольного $X \in \mathcal{X}$. Более того, такие супермодулярные функционалы мы и будем называть когерентными мерами риска.

Определение 2 Когерентной мерой риска называется функционал $f: \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, обладающий следующими свойствами монотонности, супераддитивности, положительной однородности и инвариантности относительно сдвигов, соответственно:

$$X \leq Y \implies f(X) \leq f(Y). \tag{6}$$

$$f(X+Y) \geq f(X) + f(Y) \text{ для } X, Y \in \mathcal{X}. \tag{7}$$

$$f(\lambda X) = \lambda f(X), \quad \lambda > 0, \tag{8}$$

$$f(X + aI) = f(X) + a, \quad a \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Здесь X, Y — произвольные случайные величины из $\mathcal{X}$, а $I = (1, 1, \ldots, 1)$ — вектор с единичными компонентами длины n. Отметим, что из (8) вытекает свойство

$$f(0) = 0, \tag{10}$$

что вместе с (6) дает также

$$f(X) \geq 0 \text{ при } X \geq 0. \tag{11}$$

В [1] была получена также характеризация когерентных мер риска в терминах множества приемлемых рисков. Прежде всего, полезно отметить, что если задана какая-либо мера риска f (вещественный функционал на $\mathcal{X}$), то множеством приемлемых рисков естественно называть совокупность рисков, задаваемых условием

$$A_f = \{X \in \mathcal{X} : f(X) \geq 0\}. \tag{12}$$

В [1] было показано, что для когерентной меры риска f множество приемлемых рисков есть объект, введенный в определении 1. Точнее, справедлива

Теорема 1 *Пусть f — когерентная мера риска на $\mathcal{X}$, то есть, вещественный функционал, обладающий свойствами (6) — (9), и пусть A_f — множество приемлемых рисков этой меры, определенное в (12). Тогда A_f является выпуклым замкнутым конусом в $\mathcal{X}$, причем $C_+ \subseteq A_f$ и $C_{--} \cap A_f = \emptyset$.*

Оказывается, что когерентные меры риска можно вполне охарактеризовать множеством приемлемых рисков. Именно, справедлива

Теорема 2 *Пусть A — множество приемлемых рисков в смысле определения 1, а функционал f_A задан на $\mathcal{X}$ следующим образом:*

$$f_A(X) = \sup\{b \in \mathbf{R}: \ X - bI \in A\}. \tag{13}$$

Тогда f_A обладает свойствами (6) — (9), то есть, является когерентной мерой риска.

Пример 1 Важным примером когерентной меры риска является математическое ожидание относительно фиксированной вероятностной меры. Рассмотрим вероятностную меру $Q = (q_1, \dots, q_n) \in S_n$, где стандартный симплекс S_n задан в (1). Тогда f_Q является когерентной мерой риска, если задать этот функционал выражением

$$f_Q(X) = \mathbf{E}_Q X = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n \text{ для } X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}. \tag{14}$$

Другими примерами могут служить мера возмущенной вероятности [7] и ее частный случай CVaR [8].

В [1] получена также важная теорема о представлении когерентных мер риска в виде экстремального значения линейных функционалов.

Теорема 3 *Функционал f на $\mathcal{X}$ является когерентной мерой риска в том и только в том случае, когда найдется семейство вероятностных мер $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$ в S_n такое, что*

$$f(X) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_Q X, \quad X \in \mathcal{X}. \tag{15}$$

Из приведенной теоремы вытекает, что когерентные меры риска представляют собой нижние огибающие семейств линейных функционалов. Семейство мер $\mathcal{P}$ можно назвать генератором когерентной меры риска f. Когерентная мера риска из примера 1 представляется в виде (15) с одноточечным семейством $\mathcal{P}$.

Замечание 1 Генератор когерентной меры риска определяется, вообще говоря, не единственным образом. Действительно, легко видеть, что если вместо семейства мер $\mathcal{P}$ в (15) использовать его выпуклую оболочку $Co(\mathcal{P})$, то правая часть этого равенства не изменится. Поэтому, с учетом теоремы Крейна-Мильмана, наряду с данным семейством мер $\mathcal{P}$, в качестве генератора когерентной меры риска можно использовать произвольное семейство $\mathcal{Q}$, лежащее между его выпуклой оболочкой $Co(\mathcal{P})$ и множеством $EP(Co(\mathcal{P}))$ крайних точек последней: $EP(Co(\mathcal{P})) \subseteq \mathcal{Q} \subseteq Co(\mathcal{P})$. С понятием крайней точки и теоремой Крейна-Мильмана о представлении выпуклого множества можно познакомиться в [9]. $\diamond$

3 Обобщение Джарроу и Пурнанандама

В работе [3] предлагается следующее обобщение когерентных мер риска (напомним, что мы переформулируем все предположения и результаты в терминах супермодулярных версий когерентных мер риска). Ограничимся введением этих функционалов через множество приемлемых рисков. Всюду далее $\|\cdot\|$ — некоторая норма на $\mathcal{X}$. Расстояние от точки $X \in \mathcal{X}$ до множества $B \subseteq \mathcal{X}$ определяем, как обычно, посредством

$$d(X, B) = \inf_{Y \in B} \|X - Y\|.$$

Определение 3 Пусть A — множество приемлемых рисков. Функционал

$$j_A(X) = -\inf_{Y \in A} \|X - Y\| = -d(X, A). \tag{16}$$

называется обобщенной мерой риска по Джарроу-Пурнанандаму (или, коротко, ДП-мерой).

Отметим, что ДП-мера тождественно равна нулю на множестве приемлемых рисков:

$$j_A(X) = 0, \quad X \in A. \tag{17}$$

Это означает, что мера риска j_A не различает между собой приемлемые риски, что ограничивает сферу применения таких мер риска в задачах принятия решений: они помогают избегать неприемлемых ситуаций, но не дают никаких рекомендаций по выбору наилучшего решения среди приемлемых. Кроме того, (17) означает также, что когерентная мера риска не является частным случаем (16), поскольку не обладает свойством типа (17); более того, классические когерентные меры риска различают между собой приемлемые риски и могут использоваться при принятии решений в обеих частях рискового спектра.

Целью настоящей работы является модификация подхода Джарроу и Пурнанандама, при которой получается действительное обобщение когерентных мер риска. Выполнению этой задачи посвящен следующий параграф.

4 Обобщенная когерентная мера риска

Зафиксируем на множестве рисков $\mathcal{X}$ какую-либо норму $\|\cdot\|$. Пусть A — множество приемлемых рисков. Назовем обобщенной когерентной мерой риска следующий функционал:

$$f(X) = f_A(X) = \delta_A(X) \inf_{Y \in \partial A} \|X - Y\| = \delta_A(X) \cdot d(X, \partial A)\,, \tag{18}$$

где

$$\delta_A(X) = \begin{cases} 1, & X \in A, \\ -1, & X \in A^c, \end{cases} \tag{19}$$

обозначает индикаторную функцию множества A, а ∂A — граница множества A. Нетрудно заметить, что для $X \in A^c$ определение (18) совпадает с (16). Различие между этими определениями проявляется при $X \in A$, для приемлемых рисков.

Обозначим $\mathcal{X}^*$ пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{X}$ (двойственное пространство), $\|\cdot\|_*$ — норму в этом пространстве, и рассмотрим в нем конус A^*, двойственный к A; он состоит из всевозможных линейных непрерывных функционалов, принимающих на всех элементах из A только неотрицательные значения:

$$A^* = \{g \in \mathcal{X}^* : \ g(X) \geq 0, \ X \in A\}. \tag{20}$$

В этом двойственном конусе выделим подмножество функционалов, лежащих на единичной сфере $\mathcal{X}^*$:
$$A_1^* = \{g \in A^* : \ \|g\|_* = 1\}.$$

Теорема 4 *Пусть f — обобщенная когерентная мера риска, соответствующая множеству приемлемых рисков A. Тогда справедливо представление*
$$f(X) = \inf_{g \in A_1^*} g(X), \quad X \in \mathcal{X}. \tag{21}$$
Верно и обратное: если $A_1^* \subseteq C_+^*$ — некоторое множество функционалов с единичной нормой, то формула (21) задает обобщенную когерентную меру риска.

Доказательству теоремы 4 предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Для линейного функционала $g \in \mathcal{X}^*$ обозначим $L_g^+ = \{X \in \mathcal{X} : \ g(X) \geq 0\}$ и $L_g^- = -L_g^+ = \{X \in \mathcal{X} : \ g(X) \leq 0\}$ задаваемые им полупространства, а $L_g^0 = L_g^+ \cap L_g^- = \{X \in \mathcal{X} : \ g(X) = 0\}$ — разделяющую их гиперплоскость.

Лемма 1
$$A = \bigcap_{g \in A^*} L_g^+ = \bigcap_{g \in A_1^*} L_g^+. \tag{22}$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из того факта, что пространство $\mathbf{R}^n$ рефлексивно, и для выпуклого замкнутого конуса A в $\mathbf{R}^n$ второй сопряженный конус A^{**} совпадает с A. Второе равенство является тривиальным следствием того факта, что при $a > 0$ полупространства L_g^+ и L_{ag}^+ совпадают, так что вместо лучей конуса A^* достаточно рассматривать по одному представителю каждого луча, например, обладающему единичной нормой функционалу $g/\|g\|_*$. $\diamond$

Аналогично доказывается "внешняя" по отношению к предыдущей лемма о представлении $\overline{A^c}$ — замыкания дополнения к A.

Лемма 2
$$\overline{A^c} = \bigcup_{g \in A^*} L_g^- = \bigcup_{g \in A_1^*} L_g^-. \tag{23}$$

В следующей лемме расстояние от точки пространства $\mathcal{X}$ до гиперплоскости характеризуется в терминах функционала, задающего эту гиперплоскость.

Лемма 3 *Для $X \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{X}^*$, при $\|g\| = 1$ выполняется равенство*
$$d(X, L_g^0) = |g(X)|. \tag{24}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $g(X) > 0$. При $g(X) < 0$ ввиду линейности функционала g все рассуждения симметричны, а при $g(X) = 0$ равенство (24), очевидно, выполняется. По определению нормы линейного функционала g имеем $|g(Z)| \leq \|Z\|$ при любом $Z \in \mathcal{X}$. В частности, для произвольного $Y \in L_g^0$ имеем $X = (X - Y) + Y$, так что $g(X) = g(X - Y) + g(Y) = g(X - Y)$ и
$$g(X) \leq \|X - Y\| \text{ при произвольном } Y \in L_g^0.$$

Переходя к инфимуму по $Y \in L_g^0$ в правой части последнего неравенства, получаем,

$$g(X) \le d(X, L_g^0). \tag{25}$$

Покажем, что $g(X)$ не может быть строго меньше, чем $d(X, L_g^0)$. По определению нормы функционала имеем

$$1 = \|g\|_* = \sup_{Z \ne 0} \frac{|g(Z)|}{\|Z\|} = \sup_{g(Z)>0} \frac{g(Z)}{\|Z\|}\,.$$

Поэтому существует последовательность Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что $g(Z_n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $g(Z_n)/\|Z_n\| \to 1$ при $n \to \infty$. Обозначим $W_n = g(X)Z_n/g(Z_n)$ и $Y_n = X - W_n$. Имеем $g(W_n) = g(X)$ и $g(Y_n) = 0$, то есть, $Y_n \in L_g^0$. Кроме того,

$$\|X - Y_n\| = \|W_n\| = g(X)\frac{\|Z_n\|}{g(Z_n)} \to g(X) \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что неравенство $g(X) < d(X, L_g^0)$ невозможно, что вместе с (25) дает утверждение леммы для случая $g(X) > 0$. $\diamond$

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем прямую часть теоремы. Начнем со случая $X \in A^c$. При этом имеем

$$d(X, \partial A) = d(X, A). \tag{26}$$

По лемме 1

$$d(X, A) = \sup_{g \in A_1^*} d(X, L_g^+).$$

Те элементы $g \in A_1^*$, для которых $g(X) \ge 0$, очевидно, не оказывают влияния на правую часть последнего равенства (для них $X \in L_g^+$), поэтому в нем можно ограничиться вычислением супремума по множеству $B_-(X) = \{g \in A_1^* : g(X) < 0\}$:

$$d(X, A) = \sup_{g \in B_-(X)} d(X, L_g^+).$$

Далее, для $g \in B_-(X)$ верно $d(X, L_g^+) = d(X, L_g^0)$, так что

$$d(X, A) = \sup_{g \in B_-(X)} d(X, L_g^0).$$

Используя лемму 3, получаем

$$d(X, A) = \sup_{g \in B_-(X)} |g(X)| = \sup_{g \in B_-(X)} (-g(X)) = -\inf_{g \in B_-(X)} g(X).$$

Учитывая (18), (26) и тот факт, что $\delta_A(X) = -1$ для $X \in A^c$, получаем

$$f(X) = \inf_{g \in B_-(X)} g(X).$$

Поскольку правая часть последнего равенства неположительна, расширение множества функционалов, по которому в нем вычисляется инфимум, до A_1^+ (при этом добавляются функционалы, обладающие свойством $g(X) \geq 0$), не изменит значения инфимума, поэтому

$$f(X) = \inf_{g \in A_1^*} g(X)\,,$$

что и составляет утверждение теоремы.

Теперь рассмотрим случай $X \in A$. С учетом леммы 2 имеем

$$d(X, \partial A) = d(X, \overline{A^c}) = \inf_{g \in A_1^*} d(X, L_g^-)\,.$$

Используя тот факт, что $g(X) \geq 0$ для $g \in A_1^*$, и лемму 3, получаем далее

$$d(X, \partial A) = \inf_{g \in A_1^*} d(X, L_g^0) = \inf_{g \in A_1^*} g(X)\,.$$

Поскольку $\delta_A(X) = 1$ при $X \in A$, последнее равенство вместе с (18) приводит нас к (21), тем самым, прямая часть теоремы доказана.

Для доказательства обратного утверждения теоремы по заданному множеству функционалов A_1^* вычислим

$$A = \bigcap_{g \in A_1^*} L_g^+\,.$$

Посредством аргументации, аналогичной использованной в доказательстве прямого утверждения теоремы, нетрудно убедиться в том, что при таком выборе A функционал (21) совпадает с (18). Теорема доказана. $\diamond$

Используя представление, полученное в теореме 4, можно изучить свойства обобщенной когерентной меры риска. Предварительно отметим одно важное свойство двойственного конуса A^*.

Лемма 4 *Если A — множество приемлемых рисков в $\mathcal{X}$, то $A^* \subseteq C_+^*$, где $C_+^* \subseteq \mathcal{X}^*$ — конус, двойственный к C_+.*

Доказательство прямо вытекает из включения $A \supseteq C_+$ в $\mathcal{X}$. $\diamond$

Теорема 5 *Пусть f — обобщенная когерентная мера риска на $\mathcal{X}$. Тогда она обладает свойствами монотонности, супераддитивности и положительной однородности (6) — (8).*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}$ таковы, что $X \leq Y$. Тогда $Y - X \in C_+$, и, тем более, $Y - X \in A$, так что для произвольной $g \in A^*$ имеем $g(Y) - g(X) = g(Y - X) \geq 0$, другими словами, $g(X) \leq g(Y)$. По теореме 4 отсюда получаем $f(X) \leq f(Y)$, что и требовалось.

Супераддитивность f показывается простой цепочкой соотношений

$$f(X+Y) = \inf_{g \in A_1^*} g(X+Y) = \inf_{g \in A_1^*} [g(X) + g(Y)] \geq \inf_{g \in A_1^*} g(X) + \inf_{g \in A_1^*} g(Y) = f(X) + f(Y).$$

Для доказательства положительной однородности достаточно заметить, что при $\lambda > 0$ по теореме 4 имеем

$$f(\lambda X) = \inf_{g \in A_1^*} g(\lambda X) = \lambda \inf_{g \in A_1^*} g(X) = \lambda f(X).$$

Теорема доказана. $\diamond$

Свойство инвариантности относительно сдвигов в виде (9) у обобщенной когерентной меры риска, вообще говоря, отсутствует (оно присутствует в частном случае, как мы увидим далее). Вместо этого у меры риска (18) имеется свойство инвариантности относительно сдвигов в других направлениях. А именно: для $X \notin A$ обозначим $\pi(X)$ точку ∂A, ближайшую к X, так что в этом случае $f(X) = \|X - \pi(X)\|$. Обозначим $u(X) = (\pi(X) - X)/\|\pi(X) - X\|$ единичный вектор в направлении $\pi(X) - X$, и рассмотрим прямую $\pi(X) + \lambda u(X),\ \lambda \in \mathbf{R}$, проходящую через точки $X, \pi(X)$. На этой прямой рассмотрим множество точек $K(X)$, обладающих тем свойством, что $\pi(X)$ является ближайшей к ним точкой границы ∂A. Это множество не пусто, так как содержит X. Кроме того, ввиду выпуклости A, все точки вида $\pi(X) + \lambda u(X)$ при $\lambda \leq 0$ также входят в $K(X)$. Ясно, что $K(X)$ представляет собой либо луч либо прямую. Обозначим $\Lambda(X)$ множество чисел λ, при которых $\pi(X) + \lambda u(X) \in K(X)$, а $\lambda_m(X) = \sup \Lambda(X)$. Нетрудно понять, что $\lambda_m(X) \geq 0$, причем, возможно $\lambda_m(X) < \infty$ (в случае, когда $K(X)$ является лучом) и $\lambda_m(X) = \infty$ (в случае, когда $K(X)$ является прямой). Теперь мы готовы сформулировать обобщенное свойство инвариантности относительно сдвигов[1].

Теорема 6 *Пусть $f = f_A$ — обобщенная когерентная мера риска, заданная множеством приемлемых рисков $A \subseteq \mathcal{X}$. Тогда для произвольного $X \notin A$ справедливо $f(\pi(X) + \lambda u(X)) = \lambda$ при всех $\lambda \in (-\infty, \lambda_m)$.*

Замечание 2 *Заметим, что при построении множества $K(X)$ вместо X можно взять любую другую точку этого множества, лежащую вне A.*

Замечание 3 *Отметим, что сформулированное свойство инвариантности относительно сдвигов обладает такими особенностями: направления инвариантности, в отличие от классической когерентной меры риска, могут быть различными, и, кроме того, инвариантность может наблюдаться не вдоль всей прямой, соответствующей направлению, а лишь вдоль луча, ограниченного с одной из сторон (всегда со стороны, "уходящей" в множество приемлемых рисков A).*

Доказательство теоремы 6 элементарно и здесь не приводится. $\diamond$

Теперь убедимся в том, что обобщенная когерентная мера риска (18) в действительности является обобщением когерентной меры риска в смысле [1].

Теорема 7 *Пусть $|\Omega| = n$, норма $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$ задана посредством (4). Тогда обобщенная когерентная мера риска (18) представляет собой классическую когерентную меру риска из [1].*

Доказательство В условиях теоремы двойственное пространство $\mathcal{X}^*$ изоморфно $\mathbf{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_1$, и состоит из функционалов g, представимых векторами $(g_1, \ldots, g_n)$.

[1] В исключительных случаях точка $\pi(X)$, вообще говоря, может оказаться неединственной. При этом возникает много направлений инвариантности, с каждым из которых связано свое множество $K(X)$, являющееся лучом или прямой. При этом все сказанное нужно применить к каждому из таких множеств $K(X)$ по отдельности. Мы не будем здесь рассматривать детали, отметим лишь, что если норма $\|\cdot\|$ является строго выпуклой, см. [9], то упомянутая неединственность не возникает.

Значение функционала g на векторе $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$ равно $g(X) = g_1 x_1 + \cdots + g_n x_n$. Множество A_1^* лежит в C_+^* (то есть, все компоненты векторов g в этом множестве неотрицательны), и, кроме того, на единичной сфере $\mathcal{X}^*$ (то есть, сумма компонент любого вектора $g \in A_1^*$ равна 1). Это означает, что элементы A_1^* являются вероятностными мерами на Ω, так что представление (21) в этом случае совпадает с представлением (15) классических когерентных мер риска, что завершает доказательство. $\diamond$

Рассмотрим еще некоторые частные случаи. Пусть $|\Omega| = n$, а $A = C_+$, то есть, множество приемлемых рисков минимально по включению. Содержательно это означает, что лицо, принимающее решение, не допускает никаких возможностей убытка (отрицательных компонент X). При этом $A^* = C_+^*$, то есть, двойственный конус является максимально возможным по включению. При любой норме в $\mathcal{X}$ множество A_1^* включает в себя все единичные орты $\mathcal{X}^*$, поэтому

$$f_A(X) = \inf_{g \in A_1^*} \sum_{i=1}^{n} g_i x_i = \min_i x_i \,.$$

Это означает, как и следовало ожидать, крайний пессимизм лица, принимающего решения: при принятии решений оно принимает в расчет только наихудший из возможных исходов $x_1, \ldots, x_n$.

В работе [4] подробно изучен случай $|\Omega| = n$, и $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$, снабженного евклидовой нормой $\| \cdot \|_2$ из класса (3).

5 Заключение

В работе введена обобщенная когерентная мера риска. Обобщение классической когерентной меры риска [1] производится в том же направлении, что и в [3], и доводится до завершения. В качестве определяющего элемента выбрано аксиоматическое задание множества приемлемых рисков и способ вычисления функционала на основании этого множества. Непосредственное аксиоматическое задание функционала будет рассмотрено отдельно.

Получена теорема о представлении обобщенной когерентной меры риска, и с ее помощью изучены свойства этого функционала. Рассмотрены некоторые частные случаи, в том числе — классическая когерентная мера риска. Приведены примеры.

Список литературы

[1] Artzner, P., Delbaen F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

[2] Follmer H., Schied A. (2002) Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics*, **6**, 429–447.

[3] Jarrow R., Purnanandam A. (2002) Generalized coherent risk measures: the firm's perspective. Working paper.

[4] Мартынова Т.А. (2005) Модифицированные когерентные меры риска (для евклидовой нормы). *В печати.*

[5] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.*/ А.А. Новоселов – Новосибирск: Наука.

[6] Delbaen F. (2000) Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Working paper, ETH, Zurich, 35p.

[7] Wang S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **v. 26**, p. 71-92.

[8] Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. (2003) Сравнение критериев VaR и CVaR, *Автоматика и телемеханика*, №7, с. 153-164.

[9] Рокафеллар Р.Т. (1973) *Выпуклый анализ.* М.: Мир.