Канонические представления полных и частичных предпочтений

А.А. Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036,
e-mail: anov@icm.krasn.ru

Аннотация

В работе рассматривается проблема построения представляющего функционала для задач принятия решений в условиях риска в случае неполностью известных предпочтений. Исследуется представление на абстрактном упорядоченном множестве и на множестве вещественных вероятностных распределений. Приводятся примеры.

Задачи принятия решений в условиях неопределенности и риска обычно сводятся к решению задач оптимизации с помощью представления индивидуальных предпочтений вещественными функционалами [1], [2]. В приложениях предпочтения часто известны не полностью; в этой связи возникает проблема аппроксимации представляющего функционала по частично известному предпочтению. В настоящей работе изучается связь частичных и полных предпочтений, а также способы представления частичных предпочтений.

В параграфе 1 приводятся необходимые сведения из теории представления предпочтений вещественными функционалами. В параграфе 2 вводится понятие регулярного предпочтения на абстрактном частично упорядоченном множестве, и изучается представление функционалами регулярных предпочтений. Параграф 3 посвящен проблеме представления частичных предпочтений, являющихся в некотором смысле регулярными. В параграфе 4 полученные результаты применяются к предпочтениям на множестве вероятностных распределений, и приводятся примеры регулярных вероятностных предпочтений.

1 Представление предпочтений

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное множество. Напомним, что бинарным отношением R на $\mathcal{X}$ называется произвольное подмножество в декартовом произведении $\mathcal{X}$ на себя: $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Говорят, что элементы $x, y \in \mathcal{X}$ находятся в отношении R, если $(x, y) \in R$, что иногда записывают также в виде xRy. *Сужением* отношения R на подмножество $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ называется отношение $R \cap (\mathcal{Y} \times \mathcal{Y})$. Отношение R называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in R$ при всех $x \in \mathcal{X}$, другими словами, если оно содержит в себе *диагональ* $I_{\mathcal{X}} = \{(x, x),\ x \in \mathcal{X}\}$ декартова произведения $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Отношение

$R^T = \{(x,y) : (y,x) \in R\}$ называется *транспозицией* отношения R, отношение $R^s = R \cap R^T$ – *симметричной* частью R, а $R^a = R \setminus R^s$ – *несимметричной* частью R. Отношение R называется *полным*, если для всяких $x, y \in \mathcal{X}$ выполнено по крайней мере одно из включений $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R$, другими словами, если $R \cup R^T \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Отношение R называется *транзитивным*, если $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$ влечет $(x,z) \in R$ для всяких $x, y, z \in \mathcal{X}$. Полное транзитивное отношение на $\mathcal{X}$ называется отношением *предпочтения*, и обозначается $\preceq$, при этом запись $x \preceq y$ понимается в смысле "x не лучше, чем y". Симметричная часть отношения предпочтения является отношением *эквивалентности*, и обозначается $\sim$, а его несимметричная часть $\prec$ образует отношение *строгого предпочтения*. Рефлексивное транзитивное отношение называется *частичным* (*слабым*) предпочтением, и обозначается $\preceq^*$.

Приведем для полноты изложения некоторые факты об отношении предпочтения из [2]. Пусть $\preceq$ – отношение предпочтения на $\mathcal{X}$, а $\sim$ – его симметричная часть. Обозначим $\mathcal{X}/\sim$ фактор-множество $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности $\sim$. Отображение $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\sim$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ его класс эквивалентности $K(x) \in \mathcal{X}/\sim$, назовем *каноническим*. Будем писать $K = K_{\preceq}$ для явного указания на отношение предпочтения, порождающее отношение эквивалентности, о котором идет речь. Верхнее $u(x)$ и нижнее $l(x)$ множества элемента $x \in \mathcal{X}$ определяются посредством $u(x) = \{y \in \mathcal{X} : x \preceq y\}$, $l(x) = \{y \in \mathcal{X} : y \preceq x\}$. Ясно, что $K(x) = u(x) \cap l(x)$, $x \in \mathcal{X}$.

Лемма 1 *Каноническое отображение $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\sim$ порождает на $\mathcal{X}/\sim$ линейный порядок по правилу*

$$K(x) \le K(y) \iff x \preceq y. \tag{1}$$

Верхние и нижние множества элементов $\mathcal{X}$ представимы в виде

$$u(x) = \bigcup_{C \in \mathcal{X}/\sim;\, C \ge K(x)} C, \qquad l(x) = \bigcup_{C \in \mathcal{X}/\sim;\, C \le K(x)} C. \tag{2}$$

Функционал $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется представляющим функционалом для отношения предпочтения $\preceq$, если

$$\mu(x) \le \mu(y) \iff x \preceq y, \quad x, y \in \mathcal{X}. \tag{3}$$

Существование представляющего функционала является предметом отдельного исследования в различных классах основных множеств $\mathcal{X}$; далее будут приведены теоремы существования для классов распределений, представляющих интерес в теории риска. Для отношения предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ обозначим $\mathcal{M}(\preceq)$ совокупность всех представляющих его функционалов μ, и отметим, что если существует хотя бы один представляющий функционал μ, то представляющим является и любое его монотонное преобразование, то есть, любой функционал $\nu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, получаемый посредством $\nu(x) = f(\mu(x))$, $x \in \mathcal{X}$, где f – любая строго возрастающая вещественная функция, область определения которой содержит область значений μ. Верно и обратное: если $\mu \in \mathcal{M}(\preceq)$, а f строго возрастает, то функционал ν, полученный из μ с помощью преобразования f, также лежит в $\mathcal{M}(\preceq)$. Для удобства ссылок сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 2 $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\preceq)$ *в том и только в том случае, когда найдется возрастающая вещественная функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такая, что $\mu(x) = f(\nu(x))$, $x \in \mathcal{X}$.*

Представляет интерес выделение некоторого единственного функционала из класса всех функционалов, представляющих данное отношение предпочтения. В следующем параграфе мы приведем достаточные условия существования таких канонических функционалов.

2 Канонические представляющие функционалы

Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ – частично упорядоченное множество. Напомним, что *цепью* в этом множестве называется произвольное линейно упорядоченное подмножество. Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется *согласованным* с порядком $\leq$, если для $x, y \in \mathcal{X}$ справедлива импликация $x < y \implies x \prec y$.

Определение 1 *Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ – частично упорядоченное множество, $A \subseteq \mathcal{X}$ – фиксированная цепь в нем. Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется регулярным, если оно согласовано с порядком и классы эквивалентности (по симметричной части $\sim$ отношения $\preceq$) имеют непустые пересечения с A:*

$$C \cap A \neq \emptyset, \;\; C \in \mathcal{X}/\sim . \tag{4}$$

В данном параграфе все предпочтения предполагаются регулярными относительно фиксированной цепи A. Регулярность является существенным требованием; в следующем примере приведено нерегулярное отношение предпочтения.

Пример 1 Пусть $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$ состоит из четырех элементов, частичный порядок $\leq$ задан на нем подмножеством $\{(a, b) \cup I_{\mathcal{X}}\}$, то есть, единственное строгое неравенство в данном порядке имеет вид $a < b$. Далее, пусть отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ задано подмножеством $\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (d, c)\} \cup I_{\mathcal{X}}$, то есть, может быть записано в виде $a \prec b \prec c \sim d$. Оба отношения изображены на рисунке 1. Здесь

	a	b	c	d
a	$\circ$	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$
b	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$
c	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$

а) Порядок $a < b$

	a	b	c	d
a	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
b	$\cdot$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
c	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$	$\circ$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$	$\circ$

б) Предпочтение $a \prec b \prec c \sim d$

Рис. 1: Нерегулярное отношение предпочтения

классы эквивалентности, порожденные предпочтением, имеют вид $\{a\}, \{b\}$ и $\{c, d\}$, а максимальное линейно упорядоченное подмножество равно $A = \{a, b\}$; последнее не пересекается с классом эквивалентности $\{c, d\}$. $\diamond$

Теорема 1 *Пусть $(\mathcal{X}, \leq)$ – частично упорядоченное множество, $A \subseteq \mathcal{X}$ – некоторая его цепь, и $f : A \to \mathbf{R}$ – строго возрастающая функция. Тогда любое регулярное отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ единственным образом представимо функционалом $\mu = \mu_R$ таким, что*

$$\mu(x) = f(x), \quad x \in A. \tag{5}$$

Замечание 1 Отметим, что в теореме 1 неявно утверждается *существование* представляющего функционала. Ключевым предположением, обеспечивающим существование, является предположение наличия строго возрастающего (и, тем самым, взаимно-однозначного) отображения f цепи A на часть множества вещественных чисел $\mathbf{R}$; при этом мощность A не превышает мощности континуума. $\diamond$

Замечание 2 Условие (5) обеспечивает единственность представляющего функционала, который можно назвать *каноническим*. Это же условие объясняет источник неединственности представляющего функционала, описанной в лемме 2: оказывается, представляющий функционал можно произвольно задавать на цепи A, относительно которой предпочтение является регулярным. $\diamond$

Доказательство. Заметим, что ввиду согласованности предпочтения с порядком каждое пересечение в (4) состоит из единственного элемента. Поэтому (4) естественно порождает взаимно-однозначное соответствие между цепью A и фактор-множеством $\mathcal{X}/\sim$:

$$g:\ \mathcal{X}/\sim\ \to\ A, \tag{6}$$

которое каждому классу эквивалентности $C \in \mathcal{X}/\sim$ ставит в соответствие единственный элемент пересечения (4). Это отображение является, кроме того, строго возрастающим относительно порядка на $\mathcal{X}/\sim$, введенного в (1). Искомый представляющий функционал строится по формуле

$$\mu(x) = f\left(g(K(x))\right),\quad x \in \mathcal{X}, \tag{7}$$

где K – каноническое отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}/\sim$. Выполнение свойства (5) для функционала μ обеспечивается способом задания отображения g в (6). Кроме того, при $x \sim y$ имеем $K(x) = K(y)$, так что, по (7) получаем $\mu(x) = \mu(y)$, а при $x \prec y$ из (1), (7) и монотонности отображений f, g вытекает $\mu(x) < \mu(y)$. Таким образом, μ действительно является функционалом, представляющим отношение предпочтения $\preceq$ в смысле (3). Теорема доказана. $\diamond$.

3 Частичные предпочтения

Пусть R – отношение предпочтения на частично упорядоченном множестве $(\mathcal{X}, \leq)$, регулярное относительно цепи A. По теореме 1 существует канонический (то есть, удовлетворяющий условию (5)) функционал $\mu = \mu_R$, представляющий R. Введем понятие *подпредпочтения* R.

Определение 2 *Частичное предпочтение $Q \subseteq R$ называется согласованным с предпочтением R, или подпредпочтением R, если $Q^s \subseteq R^s$, $Q^a \subseteq R^a$, и Q согласовано с порядком $\leq$ в смысле импликации $x < y \implies (x, y) \in Q^a$.*

Обозначим $\mathcal{P}_R$ совокупность всех подпредпочтений R. Ясно, что порядок $\leq$ является наименьшим, а R – наибольшим элементом $\mathcal{P}_R$ по включению, так что для произвольного $Q \in \mathcal{P}_R$ выполняется $(\leq) \subseteq Q \subseteq R$; более того, $(\leq)^s = I_{\mathcal{X}} \subseteq Q^s \subseteq R^s$ и $(<) = (\leq)^a \subseteq Q^a \subseteq R^a$.

Для $Q \in \mathcal{P}_R$ обозначим $u_Q(x) = \{y \in \mathcal{X} :\ (x, y) \in Q\}$, $l_Q(x) = \{y \in \mathcal{X} :\ (y, x) \in Q\}$ верхнее и нижнее множества частичного предпочтения $Q \in \mathcal{P}_R$. Следующие легко проверяемые утверждения для удобства ссылок собраны в лемму.

Лемма 3 *Для $Q \in \mathcal{P}_R$ симметричная часть Q^s этого отношения является отношением эквивалентности; на фактор-множестве $\mathcal{X}/Q^s$ порождается частичный порядок по правилу*

$$K_Q(x) \leq K_Q(y) \iff (x, y) \in Q, \tag{8}$$

где K_Q – каноническое отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}/Q^s$; имеет место равенство $u_Q(x) \cap l_Q(x) = K_Q(x)$, $x \in \mathcal{X}$. Для $P, Q \in \mathcal{P}_R$, $P \subseteq Q$ при всех $x \in \mathcal{X}$ имеют место включения $u_P(x) \subseteq u_Q(x)$, $l_P(x) \subseteq l_Q(x)$ и $K_P(x) \subseteq K_Q(x)$.

В следующем примере приведен фрагмент совокупности частичных предпочтений, иллюстрирующий введенные понятия.

Пример 2 Пусть $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ состоит из трех элементов, порядок $\leq$ задан неравенством $a < b$ и приведен на рисунке 2.а, а основное отношение предпочтения R записывается в виде $a \prec b \sim c$, и представлено на рисунке 2.в. Предпочтение R регулярно относительно цепи $A = \{a, b\}$ Подпредпочтения P (совпадающее с порядком $\leq$), $Q \in \mathcal{P}_R$ представлены на рисунках 2.а, 2.б; отношение P устанавливает строгое предпочтение $a \prec b$, в отношении Q добавляется строгое предпочтение $a \prec c$, и, наконец, в отношении R элементы b и c также становятся сравнимыми (и, в данном случае, эквивалентными). Далее приведены примеры верхних и нижних множеств:

$$u_P(a) = \{a, b\} \subset u_Q(a) = u_R(a) = \{a, b, c\},$$

$$u_P(b) = u_Q(b) = \{b\} \subset u_R(b) = \{b, c\}.$$

$$l_P(b) = l_Q(b) = \{a, b\} \subset l_R(b) = \{a, b, c\}.$$

Симметричные части подпредпочтений P, Q совпадают с $I_{\mathcal{X}}$, поэтому классы эквива-

	a	b	c
a	○	○	·
b	·	○	·
c	·	·	○

а) P

	a	b	c
a	○	○	○
b	·	○	·
c	·	·	○

б) Q

	a	b	c
a	○	○	○
b	·	○	○
c	·	○	○

в) R

Рис. 2: Фрагмент совокупности частичных предпочтений

лентности являются одноэлементными множествами $\{a\}, \{b\}$ и $\{c\}$. Для отношения R классы эквивалентности имеют вид $\{a\}$ и $\{b, c\}$. $\diamond$

В теореме 1 показано существование и единственность канонического представляющего функционала μ_R для регулярного предпочтения R. Рассмотрим представление частичных предпочтений из $\mathcal{P}_R$ каноническими функционалами. Для $Q \in \mathcal{P}_R$ обозначим $\mathcal{M}(Q)$ совокупность всех функционалов $\mu_Q : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию

$$\mu_Q(x) = f(x), \quad x \in A. \tag{9}$$

Теорема 2 *Пусть заданы частично упорядоченное множество $(\mathcal{X}, \leq)$, цепь A в нем и строго возрастающее отображение $f: A \to \mathbf{R}$. Пусть, далее, на $\mathcal{X}$ определено отношение предпочтения R, регулярное относительно цепи A, а также совокупность подпредпочтений $\mathcal{P}_R$. Тогда для каждого $Q \in \mathcal{P}_R$ множество канонических представляющих функционалов $\mathcal{M}(Q)$ не пусто, и для $P, Q \in \mathcal{P}_R$, подчиненных включению $P \subseteq Q$, выполняется $\mathcal{M}(P) \supseteq \mathcal{M}(Q) \ni \mu_R$.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathcal{P}_R$. По теореме 1 существует канонический функционал μ_R, представляющий R. Ввиду согласованности Q с R ясно, что этот же функционал представляет и Q, так что $\mathcal{M}(Q)$ содержит μ_R и, тем самым, не пусто.

Далее, по лемме 3 разбиение $\mathcal{X}$ на классы эквивалентности по симметричной части Q является измельчением соответствующего разбиения по симметричной части R, то есть, элементы $\mathcal{X}/Q^s$ являются подмножествами элементов $\mathcal{X}/R^s$. Для каждого $C \in \mathcal{X}/R^s$ по (4) пересечение C с A состоит из единственного элемента $\mathcal{X}$. Поэтому $\mathcal{X}/Q^s$ разбивается на две части $\mathcal{C}_Q^0$ и $\mathcal{C}_Q^1$: $\mathcal{X}/Q^s = \mathcal{C}_Q^0 \cup \mathcal{C}_Q^1$, такие, что $C \cap A = \emptyset$ при $C \in \mathcal{C}_Q^0$, и $C \cap A$ состоит из одного элемента из A при $C \in \mathcal{C}_Q^1$. Это разбиение порождает разбиение $\mathcal{X}$ на два множества $\mathcal{X}_Q^0$ и $\mathcal{X}_Q^1$ вида

$$\mathcal{X}_Q^0 = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_Q^0} C, \quad \mathcal{X}_Q^1 = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_Q^1} C.$$

Определим g_Q аналогично (6), как отображение

$$g_Q : \mathcal{C}_Q^1 \to A,$$

ставящее в соответствие каждому классу эквивалентности C из $\mathcal{C}_Q^1$ тот единственный элемент из A, который лежит в пересечении $C \cap A$. Тогда (9) с необходимостью влечет

$$\mu_Q(x) = f(g_Q(K_Q(x))), \quad x \in \mathcal{X}_Q^1\,; \tag{10}$$

другими словами, на $\mathcal{X}_Q^1$ функционал μ_Q совпадает с μ_R. Значения представляющего функционала на $\mathcal{X}_Q^0$ не подчинены столь жестким ограничениям, и не определяются однозначно. Таким образом, $\mathcal{M}(Q)$ состоит из всевозможных функционалов μ_Q, удовлетворяющих (10), в частности, справедливо $\mu_Q(x) = f(x),\ x \in A$.

Теперь покажем, что для $P, Q \in \mathcal{P}_R$, удовлетворяющих $P \subseteq Q$, классы представляющих функционалов связаны противоположным включением $\mathcal{M}(P) \supseteq \mathcal{M}(Q)$. Пусть $\mu \in \mathcal{M}(Q)$, то есть, $\mu(x) = \mu(y)$ для $(x, y) \in Q^s$, и $\mu(x) < \mu(y)$ для $(x, y) \in Q^a$. Ввиду согласованности P, Q с R имеем также $P^s \subseteq Q^s$ и $P^a \subseteq Q^a$, из чего ясно, что μ представляет также и P, то есть, $\mu \in \mathcal{M}(P)$. Теорема доказана. $\diamond$

Предположим теперь, что отношение предпочтения R, регулярное относительно цепи A, существует, но известно лишь частичное отношение предпочтения Q, согласованное с R. Представляет интерес ответ на следующий вопрос: какова совокупность регулярных отношений предпочтения, которые могут иметь Q в качестве своего согласованного подпредпочтения? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть заданы частично упорядоченное множество $(\mathcal{X}, \leq)$, цепь A в нем и строго возрастающее отображение $f: A \to \mathbf{R}$. Пусть, далее, на $\mathcal{X}$ имеется отношение предпочтения R, регулярное относительно цепи A, и известно некоторое* *его согласованное подпредпочтение Q. Тогда $R \in \mathcal{P}^Q$, где $\mathcal{P}^Q$ – совокупность всевозможных отношений предпочтения R_μ, порождаемых функционалами $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ по правилу*

$$(x,y) \in R_\mu \iff \mu(x) \le \mu(y), \quad x, y, \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

Все отношения предпочтения из $\mathcal{P}^Q$ регулярны относительно цепи A.

Доказательство теоремы легко получается с помощью аргументации, использованной в доказательстве предыдущей теоремы, и здесь не приводится. $\diamond$

4 Представление предпочтений на множестве распределений

Пусть $\mathcal{F}$ – множество вещественных функций распределения с конечным носителем, заданных на некотором интервале вещественной оси $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}$, и пусть на $\mathcal{F}$ задано отношение предпочтения $\preceq$. Задача принятия решения в условиях риска заключается в выборе наиболее предпочтительного распределения F^* из множества достижимых распределений $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, то есть, такого F^*, что $F \preceq F^*$ при всех $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Такая задача сводится к стандартной задаче оптимизации посредством введения функционала $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, представляющего отношение предпочтения $\preceq$ в смысле

$$\mu(F) \le \mu(G) \iff F \preceq G, \quad F, G \in \mathcal{F}. \tag{12}$$

В приложениях отношение предпочтения $\preceq$ обычно известно не полностью, поэтому возникает проблема аппроксимации представляющего функционала μ по частичному предпочтению. Применим общие результаты параграфов 2, 3 к данному частному случаю.

Для F, G скажем, что G стохастически доминирует F, если $F(x) \ge G(x)$ при всех $x \in \mathcal{R}$. Факт стохастического доминирования записывается $F \le_1 G$. Известно [3], что стохастическое доминирование является частичным порядком на множестве функций распределения.

Для каждого $a \in \mathcal{R}$ определим функцию распределения, вырожденного в точке a, следующим образом:

$$W_a(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ 1, x \ge a. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что совокупность $\mathcal{W}_\mathcal{R} = \{W_a,\, a \in \mathcal{R}\}$ всех вырожденных функций распределения образует цепь в частично упорядоченном множестве $(\mathcal{F}, \le_1)$.

Пусть $\preceq$ – отношение предпочтения на $(\mathcal{F}, \le_1)$, регулярное относительно цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$. В этом случае каждый класс эквивалентности по симметричной части $\preceq$ содержит ровно одну вырожденную функцию распределения W_a, при этом значение параметра a этой функции распределения называется *детерминированным эквивалентом* распределений из соответствующего класса эквивалентности. Зададим на цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$ функцию f из (5), предназначенную для выделения канонических функционалов, равной детерминированному эквиваленту

$$f(W_a) = a, \;\; a \in \mathcal{R}. \tag{13}$$

Теорема 4 *Пусть на $(\mathcal{F}, \leq_1)$ задано отношение предпочтения $\preceq$, регулярное относительно цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$. Тогда существует единственный функционал $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, представляющий предпочтение $\preceq$, и удовлетворяющий условию канонизации (13).*

Доказательство теоремы получается прямым применением теоремы 1. $\diamond$

В приложениях отношение предпочтения выявляется посредством проведения опросов или путем наблюдения за процессом принятия решений в условиях риска. При этом удается установить предпочтения вида $F \prec G$ или $F \sim G$ лишь для некоторого (конечного) количества пар распределений (F, G). В результате оказывается известным лишь частичное отношение предпочтения, согласованное с "истинным". Как показывает следующая теорема, в этом случае предпочтение может быть представлено целым классом функционалов.

Теорема 5 *Пусть на $(\mathcal{F}, \leq_1)$ имеется отношение предпочтения $\preceq$, регулярное относительно цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$, и задано частичное отношение предпочтения $\preceq^*$, согласованное с $\preceq$. Тогда класс функционалов $\mathcal{M}(\preceq^*)$, представляющих $\preceq^*$, и удовлетворяющих условию канонизации (13), не пуст, и включает функционал μ, представляющий $\preceq$.*

Доказательство теоремы получается прямым применением теоремы 2. $\diamond$

В следующей теореме, непосредственно вытекающей из теоремы 3, описывается совокупность полных отношений предпочтения, для которых заданное частичное отношение предпочтения может служить подпредпочтением.

Теорема 6 *Пусть на $(\mathcal{F}, \leq_1)$ имеется отношение предпочтения R, регулярное относительно цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$, и известно некоторое его согласованное подпредпочтение Q. Тогда $R \in \mathcal{P}^Q$, где $\mathcal{P}^Q$ – совокупность всевозможных отношений предпочтения R_μ, порождаемых функционалами $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ по правилу*

$$(F, G) \in R_\mu \iff \mu(F) \leq \mu(G), \quad F, G \in \mathcal{F}. \tag{14}$$

Все отношения предпочтения из $\mathcal{P}^Q$ регулярны относительно цепи $\mathcal{W}_\mathcal{R}$.

Рассмотрим примеры регулярных отношений предпочтения на множестве вероятностных распределений. В [4] показано, что если отношение предпочтения $\preceq$ на $(\mathcal{F}, \leq_1)$ удовлетворяет некоторым аксиомам линейности, то его можно представить функционалом ожидаемой полезности вида

$$\rho(F) = \int_\mathcal{R} U(x)\, dF(x), \quad F \in \mathcal{F},$$

где U – вещественная функция, трактуемая, как функция полезности. Регулярность линейного предпочтения обеспечивается его согласованностью с порядком стохастического доминирования; при этом функция полезности U оказывается строго возрастающей. Канонический функционал имеет в этом случае вид

$$\mu(F) = U^{-1}\left(\rho(F)\right), \quad F \in \mathcal{F},$$

где U^{-1} – обратная функция для U.

Другой пример регулярных отношений предпочтения дают предпочтения, порождаемые когерентными мерами риска [5], частным случаем которых является мера возмущенной вероятности [6]. Этот функционал имеет вид

$$\pi(F) = -\int_0^1 F^{-1}(v)\, dh(1-v), \quad F \in \mathcal{F},$$

где $h : [0,1] \to [0,1]$ – строго возрастающая функция с краевыми значениями $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, служащая для возмущения вероятностной меры, а F^{-1} – функция, обратная к функции распределения F.

Аналогичные примеры можно построить с помощью классов выпуклых мер риска [7], а также многих других типов предпочтений.

Список литературы

[1] де Гроот М. *Оптимальные статистические решения.*/ М. де Гроот // М.: Мир, 1974.

[2] Новоселов А.А. *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.*/ А.А. Новоселов – Новосибирск: Наука, 2001.

[3] Shaked M., Shanthikumar J.G. *Stochastic Orders and Their Applications.*/ M. Shaked, J.G. Shanthikumar – London: Academic Press, 1994.

[4] фон Нейман Дж.. Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.*/ Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн – М.: Наука, 1970.

[5] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. *Coherent Measures of Risk*/P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath// Mathematical Finance – 1999. – v. 9, p. 203–228.

[6] Wang S. *Premium calculation by transforming the layer premium density.* ASTIN Bulletin – 1996. – v. 26, p. 71-92.

[7] Follmer H., Schied A. *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*/H. Follmer, A. Schied// Finance and Stochastics – 2002. – v. 6, p. 429–447.