

Метод вычисления распределения квадратичного преобразования нормального случайного вектора

G.A. HOLTON ¹

А.А. Новоселов ⁴

Аннотация

В работе рассматривается метод вычисления одного несобственного интеграла, представляющего значения функции распределения случайной величины, описывающей доходность сложного нелинейного финансового портфеля.

1 ВВЕДЕНИЕ

Аналитическое вычисление меры риска VaR (Value-at-risk) в случае линейных портфелей является достаточно стандартной процедурой, и описано, например, в техническом документе компании RiskMetrics. При наличии в портфеле нелинейных позиций, таких, как производные ценные бумаги, линейное приближение становится неработоспособным. В этом случае необходимо строить нелинейные приближения к распределению доходности портфеля.

В [1] предложен один метод вычисления распределения квадратичного преобразования от нормально распределенного случайного вектора. В результате применения этого метода получается выражение для функции распределения результата в виде несобственного интеграла. При приближенном вычислении этого интеграла с заданной точностью необходимо выбрать конечный интервал интегрирования, а также численный метод интегрирования, гарантирующие в совокупности достижение заданной точности.

Настоящая работа посвящена построению метода вычисления упомянутого интеграла. Построенный алгоритм позволяет оптимальным в некотором смысле образом выбирать пределы интегрирования и шаг численной формулы интегрирования, обеспечивающие заданную точность решения задачи.

Отметим, что точность вычисления интеграла следует согласовывать с ошибкой, вносимой предположением о квадратичности преобразования исходного нормального

¹ Contingency Analysis

PO Box 961, Boston MA, 02199, U.S.A., e-mail: glyn@contingencyanalysis.com

© 2003 G.A. Holton

ФАМ'2003 — II Всероссийская ФАМ конференция

Опубликовано в 2003

⁴ Институт вычислительного моделирования СО РАН

Академгородок, Красноярск, Россия, 660036, e-mail: anov@icm.krasn.ru

© 2003 А.А. Новоселов

ФАМ'2003 — II Всероссийская ФАМ конференция

Опубликовано в 2003

вектора. Кроме того, представляет интерес распространение данного метода на нелинейные преобразования, отличные от квадратичных, что позволит улучшить приближение для распределения портфеля.

Интересно отметить, что в пакете Mathematica фирмы Wolfram Research [2] имеется средство для вычисления функции распределения квадратичного преобразования нормального случайного вектора, однако там используется разложение в ряд, которое дает неприемлемые результаты уже для двумерного случайного вектора.

2 КВАДРАТИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В данном параграфе для полноты изложения получим формулу выражающую функцию распределения преобразованного вектора через параметры исходного распределения и параметры преобразования. Напомним, что распределением χ -квадрат с ν степенями свободы и параметром нецентральности δ^2 называется распределение случайной величины

$$(\xi_1 + \delta_1)^2 + \dots + (\xi_\nu + \delta_\nu)^2,$$

где ξ_1, \dots, ξ_ν – независимые стандартные нормальные случайные величины, а $\delta^2 = \delta_1^2 + \dots + \delta_\nu^2$.

Итак, пусть вектор X размерности n имеет нормальное совместное распределение с вектором средних $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ и ковариационной матрицей S , которая является симметричной и положительно определенной⁷. Рассмотрим квадратичный полином $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ вида

$$P(x) = x^T C x + b^T x + a, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

где C – симметричная матрица размера $n \times n$, b – вектор из \mathbf{R}^n , a – число. Градиент P имеет вид

$$P'(x) = 2Cx + b. \quad (2)$$

Применим к X это квадратичное преобразование:

$$Y = P(X) = X^T C X + b^T X + a, \quad (3)$$

и выведем формулу для функции распределения случайной величины Y .

Пусть $S = A^T A$ – разложение Холецкого для матрицы S , то есть, A является верхней треугольной матрицей. Рассмотрим собственные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и векторы матрицы $R = A C A^T$, причем будем нумеровать их таким образом, чтобы все нулевые собственные числа (если таковые найдутся), и соответствующие им собственные векторы, оказались в конце списка. Обозначим m количество ненулевых собственных чисел (m совпадает с рангом матрицы C). Далее, пусть столбцы матрицы V являются

⁷ В случае вырожденности S можно осуществить предварительное понижение размерности X , например, методом главных компонент, после чего ковариационная матрица совместного распределения станет невырожденной.

ортонормированными собственными векторами матрицы R , так что $V^T = V^{-1}$. Пусть, кроме того, Γ – диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа R . В частности, имеем $R = V\Gamma V^T$ и $\Gamma = V^T R V$. Обозначим $D = A^T V$, введем замену переменных $Z = D^{-1}(X - \mu)$, то есть, $X = \mu + DZ$. Прямым вычислением легко проверить, что вектор средних для Z равен 0, а его ковариационная матрица оказывается единичной, то есть, компоненты вектора Z представляют собой независимые стандартные нормальные случайные величины. Подставляя выражение X через Z в (3), получаем

$$\begin{aligned} Y &= (\mu^T + Z^T D^T)C(\mu + DZ) + b^T(\mu + DZ) + a = P(\mu) + (P'(\mu))^T DZ + Z^T \Gamma Z \\ &= Z^T \Gamma Z + d^T Z + P(\mu), \end{aligned}$$

где $d^T = (P'(\mu))^T D$. Расписывая покомпонентно, имеем

$$Y = \sum_{k=1}^m \left[\gamma_k Z_k^2 + d_k Z_k \right] + \sum_{k=m+1}^n d_k Z_k + P(\mu). \quad (4)$$

В слагаемых первой суммы в (4) можно выделить полные квадраты:

$$\gamma_k Z_k^2 + d_k Z_k = \gamma_k \left(Z_k^2 + \frac{d_k}{\gamma_k} Z_k \right) = \gamma_k \left(Z_k + \frac{d_k}{2\gamma_k} \right)^2 - \frac{d_k^2}{4\gamma_k} = \gamma_k Q_k - \frac{d_k^2}{4\gamma_k},$$

где

$$Q_k = \left(Z_k + \frac{d_k}{2\gamma_k} \right)^2 -$$

случайная величина с распределением χ -квадрат с одной степенью свободы и параметром нецентральности

$$\delta_k^2 = \frac{d_k^2}{4\gamma_k^2},$$

$k = 1, \dots, m$. Остальные слагаемые в (4) образуют нормальную случайную величину. Объединяя неслучайные слагаемые, из (4) получаем

$$Y = \sum_{k=1}^m \gamma_k Q_k + \beta Q_0 + \alpha, \quad (5)$$

где Q_0 – стандартная нормальная случайная величина,

$$\beta = \left(\sum_{k=m+1}^n d_k^2 \right)^2, \quad \alpha = \mu^T C \mu + b^T \mu + a - \sum_{k=1}^m \frac{d_k^2}{4\gamma_k}.$$

Как показано в [1], функция распределения случайной величины Y имеет вид

$$F(y) = \int_0^\infty f(w, y) dw, \quad (6)$$

где

$$f(w, y) = \frac{e^{A(w)} \sin(B(w, y) + C(w))}{D(w)}, \quad (7)$$

$$A(w) = -\frac{w^2}{2} \left(\beta^2 + \sum_{k=1}^m \frac{4\gamma_k^2 \delta_k^2}{1 + 4\gamma_k^2 w^2} \right), \quad (8)$$

$$B(w, y) = w \left(\alpha - y + \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k \delta_k^2}{1 + 4\gamma_k^2 w^2} \right), \quad (9)$$

$$C(w) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \arctan(2\gamma_k w), \quad (10)$$

$$D(w) = w \left[\prod_{k=1}^m (1 + 4\gamma_k^2 w^2) \right]^{1/4}. \quad (11)$$

Перейдем к вычислению интеграла в (6).

3 ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Для приближенного вычисления интеграла (6) необходимо решить две задачи. Во-первых, подинтегральная функция (7) в (6) имеет две особенности: неопределенность вида $0/0$ при $w = 0$, и неограниченный справа интервал интегрирования. Поэтому нужно найти конечный интервал интегрирования $[l, u] \subset [0, \infty)$, не содержащий особенностей. Как будет показано ниже, неопределенность в нуле раскрывается с помощью конечного предела, поэтому содержательной остается задача выбора правого предела интегрирования u . Во-вторых, на выбранном отрезке $[0, u]$ необходимо применить некоторый метод численного интегрирования, который также внесет свою ошибку в окончательный результат.

Раскроем неопределенность в 0 . Будем обозначать символом \sim факт одинакового поведения функций при $w \rightarrow 0$, то есть, $g(w) \sim h(w)$ означает $g(w)/h(w) \rightarrow 1$ при $w \rightarrow 0$. Из (8) – (11) видно, что

$$A(w) \sim 0, \quad B(w, y) \sim w \left(\alpha - y + \sum_{k=1}^m \gamma_k \delta_k^2 \right), \quad C(w) \sim w \sum_{k=1}^m \gamma_k, \quad D(w) \sim w,$$

поэтому

$$f(w, y) \sim w^{-1} \sin \left[w \left(\alpha - y + \sum_{k=1}^m \gamma_k (1 + \delta_k^2) \right) \right] \sim \alpha - y + \sum_{k=1}^m \gamma_k (1 + \delta_k^2),$$

или, другими словами,

$$\lim_{w \rightarrow 0} f(w, y) = \alpha - y + \sum_{k=1}^m \gamma_k (1 + \delta_k^2), \quad (12)$$

так что правую часть (12) можно считать значением $f(0, y)$.

Далее, зафиксируем произвольным образом y , и обозначим I интеграл из (6). Кроме того, обозначим $I(u)$ точный интеграл по выбранному конечному интервалу интегрирования $[0, u]$:

$$I(u) = \int_0^u f(w, y) dw, \quad (13)$$

а $\Delta_1(u)$ – ошибку, вносимую усечением интервала интегрирования

$$\Delta_1(u) = |I - I(u)|. \quad (14)$$

Ясно, что величина этой ошибки является убывающей функцией u , и $\Delta_1(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Обозначим $\overline{\Delta}_1(u)$ какую-либо верхнюю границу для $\Delta_1(u)$: $\Delta_1(u) \leq \overline{\Delta}_1(u)$, $u \in [0, \infty)$, для которой имеется удобное аналитическое представление, и которая ведет себя так же, как Δ_1 , а именно, убывает при возрастании u , и $\overline{\Delta}_1(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Далее, обозначим $I_n(u)$ результат применения какого-либо численного метода (с разбиением интервала интегрирования $[0, u]$ на n отрезков) к вычислению интеграла $I(u)$, $\Delta_2(u, n) = |I(u) - I_n(u)|$ – ошибку численного интегрирования, а $\overline{\Delta}_2(u, n)$ – какую-либо верхнюю границу для этой ошибки, обладающую следующими свойствами: $\overline{\Delta}_2$ возрастает по u , убывает по n , и

$$\lim_{u \rightarrow 0} \overline{\Delta}_2(u, n) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \overline{\Delta}_2(u, n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Delta}_2(u, n) = 0.$$

Обычно граница ошибки численного интегрирования имеет вид

$$\overline{\Delta}_2(u, n) = \frac{g(u)}{n^p}, \quad (15)$$

где g – возрастающая функция, и $p > 0$. Для таких оценок справедлива следующая

Теорема 1 Пусть граница ошибки усечения $\overline{\Delta}_1(u)$ является убывающей функцией и стремится к 0 при $u \rightarrow \infty$. Пусть, далее, граница ошибки численного интегрирования имеет вид (15), где функция g строго возрастает, положительна при $u > 0$, стремится к ∞ при $u \rightarrow \infty$, а $p > 0$. Обозначим u_n решение задачи оптимизации

$$\overline{\Delta}_1(u) + \overline{\Delta}_2(u, n) \longrightarrow \min_u$$

при фиксированном n . Тогда последовательность u_n является неубывающей, $u_n \rightarrow \infty$ и $\overline{\Delta}_1(u_n) + \overline{\Delta}_2(u_n, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим способы получения границ ошибок $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$. Для методов численного интегрирования имеется множество различных границ, справедливых при тех или иных условиях. Например, если в задаче вычисления интеграла

$$\int_0^u f(w) dw.$$

функция f дифференцируема k раз (при некотором целом $k > 0$), и k -я производная ограничена:

$$\sup_{x \in [0, u]} |f^{(k)}(x)| \leq L_k,$$

то для формулы трапеций справедливы следующие верхние границы ошибки (см., например, [3]):

$$\overline{\Delta}_2^{(1)}(u, n) = \frac{L_1 u^2}{4n}, \quad \overline{\Delta}_2^{(2)}(u, n) = \frac{L_2 u^3}{12n^2}.$$

Видно что обе границы имеют вид (15).

При выводе границ для ошибки усечения (14) удобно использовать следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1 Пусть $b(w)$ является интегрируемой верхней границей для подинтегральной функции f , то есть, $|f(w)| \leq b(w)$, $w \geq 0$. Тогда в качестве верхней границы ошибки усечения можно выбрать

$$\bar{\Delta}_1(u) = \int_u^\infty b(w) dw.$$

Лемма 2 Пусть $g(w)h(w)$ является интегрируемой верхней границей для подинтегральной функции f , то есть, $|f(w)| \leq g(w)h(w)$, $w \geq 0$, причем g является невозрастающей функцией, h интегрируема, и

$$H(u) = \int_u^\infty h(w) dw.$$

Тогда в качестве верхней границы ошибки усечения можно выбрать

$$\bar{\Delta}_1(u) = g(u)H(u).$$

Вывод конкретных выражений для границ ошибок усечения и численного интегрирования связан с громоздкими операциями оценивания производных, однако, концептуально прост, и здесь не приводится.

В заключение отметим две стратегии оптимизации приближенного вычисления интеграла (6). В первой из них фиксируется число узлов сетки интегрирования n , (с прикладной точки зрения – вычислительные затраты), и отыскивается наилучший уровень отсечения u_n , определенный в теореме 1. При другой стратегии задается требуемая ошибка вычисления интеграла ε , а затем подбирается наименьшее n , при котором достигается заданная точность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G.A. HOLTON (2003) *Value at Risk: Theory and practice*. Academic press.
- [2] (2003) Mathematica: Statistics, Multinormal Distribution.
<http://documents.wolfram.com/v4/AddOns/StandardPackages/Statistics/MultinormalDistribution.html>
- [3] КРЫЛОВ В.И., БОБКОВ В.В., МОНАСТЫРНЫЙ П.И. (1976) *Вычислительные методы, т.1*. М.: "Наука".