Характеристические классы семейств мер риска

А.А. Новоселов [1]

Аннотация

Принятие решений в условиях риска обычно осуществляется с использованием функционала (меры риска), заданного на множестве вероятностных распределений, и представляющего отношение предпочтения на этом множестве. При решении обратной задачи - построении меры риска по отношению предпочтения – желательно осуществлять решение этой задачи на возможно более узком множестве распределений. В настоящей работе вводится понятие характеристического класса распределений, обладающего тем свойством, что меры риска из фиксированного семейства обладают единственным продолжением с характеристического класса на все множество распределений. Вычислены характеристические классы для следующих семейств мер риска: ожидаемая полезность, возмущенная вероятность, комбинированный функционал.

1 Введение

В задачах принятия решений в условиях неопределенности и риска используется отношение (индивидуального) предпочтения на множестве вероятностных распределений; наилучшее решение соответствует наилучшему (в смысле предпочтения) распределению среди всех достижимых распределений. В большинстве случаев отношение предпочтения удается представить вещественным функционалом, заданным на множестве распределений.

Модель индивидуального предпочтения (представляющего функционала) появляется в результате решения обратной задачи: восстановления функционала по результатам наблюдений за процессом принятия решений. Наблюдения могут проводиться как в пассивном, так и в активном режиме. В последнем случае эксперименты для проведения наблюдений планируются постановщиком задачи; при этом естественно стремление снизить затраты на проведение экспериментов за счет их рациональной организации.

Понятие характеристического класса распределений для данного семейства функционалом (мер риска) связано с проблемой рациональной организации измерений при решении обратной задачи. Так называется класс распределений (по возможности узкий), задание функционала на котором вполне определяет значение функционала на всех распределениях. Другими словами, продолжение функционала с характеристического класса на все множество распределений единственно в данном семействе функ-

[1] Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036, e-mail: anov@icm.krasn.ru

ФАМ'2003 — II Всероссийская ФАМ конференция
Опубликовано в 2003

ционалов. Тем самым, решение обратной задачи на всем множестве распределений сводится к ее решению лишь на характеристическом классе.

В настоящей работе дается строгое определение характеристического класса для семейства мер риска, и вычисляются характеристические классы для семейств функционалов ожидаемой полезности, возмущенной вероятности, и семейства комбинированных функционалов.

2 Основные понятия

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое множество функций распределения на вещественной оси $\mathbf{R}$. В настоящей работе мы будем считать, что в $\mathcal{F}$ входят всевозможные функции распределения с конечным носителем[4]. Пусть на $\mathcal{F}$ задано отношение предпочтения $\preceq$, то есть, полное транзитивное отношение [1], которое в задачах принятия решений в условиях риска трактуется следующим образом: для $F, G \in \mathcal{F}$ запись $F \preceq G$ означает, что распределение F не лучше, чем распределение G.

При наличии некоторых естественных предположений о регулярности отношения предпочтения, его можно представить функционалом (мерой риска) $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ [1] в том смысле, что

$$F \preceq G \iff \mu(F) \leq \mu(G), \quad F, G \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Знание функционала μ позволяет вычислять оптимальные решения. Однако, точное вычисление самого функционала μ по отношению предпочтения $\preceq$ посредством (1) представляет собой нетривиальную обратную задачу. Облегчить решение этой задачи могло бы сужение множества распределений, на которых требуется определить значение меры риска μ. Если об отношении предпочтения $\preceq$ не имеется никакой информации, то сужение невозможно. Однако, часто в качестве исходного объекта рассматривается некоторый класс отношений предпочтения, описанный набором аксиом. В этом случае удается реализовать упомянутую программу упрощения.

В настоящей работе вводится понятие характеристического класса распределений для семейства мер риска. Характеристический класс обладает тем свойством, что продолжение меры риска с него на все множество распределений $\mathcal{F}$ единственно в рамках заданного семейства.

Обозначим $\mathcal{M}$ множество всех конечнозначных вещественных функционалов на $\mathcal{F}$ (мер риска).

Для $a \in \mathbf{R}$ обозначим

$$W_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & a \leq x \end{cases}$$

функцию распределения, вырожденного в точке $a \in \mathbf{R}$. Совокупность всех вырожден-

[4] Говорят, что функция распределения F на $\mathbf{R}$ имеет конечный носитель $[a, b]$, если $-\infty < a < b < \infty$, $a = \sup\{x : F(x) = 0\}$, $b = \inf\{x : F(x) = 1\}$.

ных распределений будем обозначать

$$\mathcal{W} = \{W_a,\ a \in \mathbf{R}\}. \tag{2}$$

Для $a < b$ и $p \in (0,1)$ обозначим

$$B_{a,b,p}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - p, & a \le x < b, \\ 1, & b \le x \end{cases}$$

функцию распределения Бернулли. Совокупность всех таких распределений (при фиксированных a, b) обозначим

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{B_{a,b,p},\ p \in (0,1)\}. \tag{3}$$

В частности, при $a = 0, b = 1$ будем использовать обозначение $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{0,1}$.

Пусть $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – вещественная функция. Функционал $\rho_U : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, заданный посредством

$$\rho_U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dF(x), \quad F \in \mathcal{F}, \tag{4}$$

называется функционалом **ожидаемой полезности**, при этом функция U обычно называется функцией полезности. Обозначим $\mathbf{U}$ совокупность строго возрастающих функций полезности U, а $\mathcal{U} = \{\rho_U,\ U \in \mathbf{U}\}$ – соответствующее семейство функционалов ожидаемой полезности. Отметим, что функционалы из $\mathcal{U}$ являются строго монотонными относительно первого стохастического доминирования [2].

Если X_F – какая-либо случайная величина, имеющая функцию распределения F, то, очевидно, $\rho_U(F) = \mathbf{E}U(X_F)$. Функционал ожидаемой полезности можно также записать в виде

$$\rho_U(F) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\, dv, \quad F \in \mathcal{F},$$

где

$$F^{-1}(v) = \sup\{x : F(x) \le v\} - \tag{5}$$

функция, обратная к функции распределения $F \in \mathcal{F}$. В частности, для вырожденных распределений и распределений Бернулли имеем

$$W_a^{-1}(v) = a, \quad v \in (0,1); \quad B_{a,b,p}^{-1}(v) = \begin{cases} a, & v \in (0, 1-p), \\ b, & v \in [1-p, 1) \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $g : [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая функция, обладающая свойствами

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \tag{7}$$

а $\mathbf{G}$ – совокупность всех таких функций. Функционал $\pi_g : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, заданный посредством

$$\pi_g(F) = \int_{-\infty}^{0} [g(1 - F(x)) - 1]\, dx + \int_0^{\infty} g(1 - F(x))\, dx \tag{8}$$

называется функционалом (мерой риска) **возмущенной вероятности**. Его можно также представить в виде

$$\pi_g(F) = -\int_0^1 F^{-1}(v)\, dg(1-v) = \int_0^1 F^{-1}(v)\, d\widetilde{g}(v),$$

где $\widetilde{g}(v) = 1 - g(1-v)$, $v \in [0,1]$ – возмущающая функция, **двойственная** для g. Обозначим $\mathcal{G} = \{\pi_g : g \in \mathbf{G}\}$ семейство всех функционалов возмущенной вероятности.

В [3] введена комбинированная мера риска

$$\mu_{U,g}(F) = \int_0^1 U(F^{-1}(v))\, d\widetilde{g}(v), \quad F \in \mathcal{F}, \tag{9}$$

объединяющая привлекательные черты функционалов ожидаемой полезности и возмущенной вероятности. Функционал (9) обладает повышенной гибкостью по сравнению с базовыми мерами риска, на которых он основан. Данный функционал позволяет описать нелинейность индивидуальных предпочтений как в пространстве распределений, так и на лучах пространства случайных величин. Эти свойства наделяют класс функционалов (9), в частности, способностью адекватно описывать индивидуальное неприятие риска [4].

3 Характеристические классы

Пусть известно, что мера риска $\mu \in \mathcal{M}$, представляющая отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{F}$, лежит в некотором семействе функционалов $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Будем называть класс распределений $\mathcal{F}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{F}$ **характеристическим** для семейства функционалов $\mathcal{N}$, если условия $\mu(F) = \nu(F)$, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ и $\mu, \nu \in \mathcal{N}$ влекут $\mu = \nu$.

Рассмотрим некоторые свойства характеристического класса. Во-первых, ясно, что в качестве характеристического класса для произвольного семейства мер риска $\mathcal{N}$ можно использовать $\mathcal{F}$, так что понятие характеристического класса не является пустым. Интерес представляют, конечно, "минимальные" в каком-либо смысле характеристические классы. Во-вторых, если семейство мер риска $\mathcal{N}$ состоит из единственного элемента μ, то в качестве характеристического класса можно использовать пустое множество. Понятие характеристического класса приобретает содержательный смысл, когда в $\mathcal{N}$ входит много элементов, но $\mathcal{N}$ не совпадает с $\mathcal{M}$.

Предложение 1 *Пусть $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{M}$. Тогда найдутся характеристические классы $\mathcal{F}(\mathcal{N}_1), \mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$ такие, что $\mathcal{F}(\mathcal{N}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$ – характеристический класс для семейства мер риска $\mathcal{N}_2$, и $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$. Тогда в качестве $\mathcal{F}(\mathcal{N}_1)$ можно использовать $\mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$. □

Замечание 1 *Отметим, что характеристический класс, вообще говоря, не определяется однозначно, поэтому, в условиях предложения 1, может случиться так, что $\mathcal{F}(\mathcal{N}_1) \nsubseteq \mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$ для $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$.*

Вычислим характеристические классы для функционалов ожидаемой полезности (4) и возмущенной вероятности (8).

Теорема 1 *Характеристическим классом для семейства функционалов ожидаемой полезности $\mathcal{U}$ является класс вырожденных распределений $\mathcal{W}$, определенный в (2).*

Доказательство. Действительно, вычисляя функционал (4) на вырожденном распределении $W_a \in \mathcal{W}$, получаем

$$\rho_U(W_a) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dW_a(x) = U(a),$$

поэтому знание значений $\rho_U(W_a)$ при всех $a \in \mathbf{R}$ вполне определяет функцию U, а с ней – и функционал ρ_U. □

Замечание 2 *Отметим, что, ввиду монотонности функции U, в качестве характеристического класса можно использовать совокупность $\mathcal{W}^{\mathbf{Q}}$ вырожденных распределений W_a для рациональных a. При этом характеристический класс оказывается счетным.*

Теорема 2 *Характеристическим классом для семейства функционалов возмущенной вероятности (8) является класс распределений Бернулли $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{0,1}$, определенный в (3).*

Доказательство. Действительно, вычисляя значение функционала π_g на функции распределения $B_{0,1,p} \in \mathcal{B}$, получаем с учетом (6):

$$\pi_g(B_{0,1,p}) = 0 \cdot \tilde{g}(1-p) + 1 \cdot (1 - \tilde{g}(1-p)) = g(p), \quad p \in (0,1),$$

что вместе с (7) вполне определяет функцию g, и, тем самым, функционал π_g.

Замечание 3 *Поскольку функция g монотонна, ее достаточно задать только в рациональных точках отрезка $(0,1)$, для чего достаточно использовать в качестве характеристического класса совокупность $\mathcal{B}^{\mathbf{Q}}$ распределений Бернулли B_p с рациональными значениями $p \in (0,1)$. При этом характеристический класс, как и в замечании 2, оказывается счетным.*

Теорема 3 *Пусть $\mathcal{M}$ – семейство комбинированных мер риска (9), где U – строго возрастающие функции полезности. Пусть комбинированный функционал $\mu_{U,g}$ является строго возрастающим относительно первого стохастического доминирования. Тогда его характеристическим классом является $\mathcal{W} \cup \mathcal{B}$.*

Доказательство. Вычисляя значения функционала $\mu_{U,g}$ на распределениях из $\mathcal{W}$ и $\mathcal{B}$, имеем:

$$\mu_{U,g}(W_a) = \int_0^1 U(a)\, d\tilde{g}(v) = U(a), \quad a \in \mathbf{R}$$

и

$$\mu_{U,g}(B_p) = U(0)\widetilde{g}(1-p) + U(1)(1-\widetilde{g}(1-p)) = U(0) + g(p)(U(1) - U(0)).$$

Отсюда видно, что знание всех значений $\mu_{U,g}(W_a)$, $a \in \mathbf{R}$ и $\mu_{U,g}(B_p)$, $p \in (0,1)$ позволяет последовательно вычислить

$$U(a) = \mu_{U,g}(W_a),\ a \in \mathbf{R}$$

и

$$g(p) = \frac{\mu_{U,g}(B_p) - \mu_{U,g}(W_0)}{\mu_{U,g}(W_1) - \mu_{U,g}(W_0)},\ \ p \in (0,1),$$

что вполне определяет функциональные параметры функционала U, g, и, тем самым, функционал $\mu_{U,g}$. □

Замечание 4 *Как и в частных случаях, описанных в теоремах 1 и 2 (см. замечания 2 и 3), в предыдущей теореме возможно использование подкласса $\mathcal{W}^{\mathbf{Q}} \cup \mathcal{B}^{\mathbf{Q}}$, составленного из распределений, вырожденных в рациональных точках $a \in \mathbf{Q}$, и распределений Бернулли с рациональным параметром $p \in [(0,1) \cap \mathbf{Q}$.*

Заключение. В работе введено понятие характеристического класса для семейства мер риска, с помощью которого удается существенно упростить решение обратных задач теории риска. Вычислены характеристические классы для семейств классических функционалов ожидаемой полезности и возмущенной вероятности, а также для нового семейства комбинированных функционалов.

Представляет также значительный интерес развитие этого понятия на случай качественного описания непосредственно в терминах предпочтений на множестве рисков.

Литература

[1] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102 с.

[2] Новоселов А.А. (2001) Монотонность и выпуклость некоторых мер риска. *Proceedings of the 1st International scientific school "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems"*, SPb., p. 169-172.

[3] A. Novosyolov (2003) Combined functionals as risk measures. *Proceedings of the Bowles Symposium "Fair Valuation of Contingent Claims and Benchmark Cost of Capital"*, Atlanta GA, 2003, p. 65-85.

[4] Новоселов А.А. (2003) Неприятие риска в нелинейных моделях принятия решений. *Труды II Всероссийской ФАМ конференции (настоящий том)*, Красноярск, ИВМ СО РАН.