# *Неприятие риска в нелинейных моделях принятия решений*

А.А. Новоселов [1]

**Аннотация**

В работе понятие неприятия риска, введенное ранее Праттом для модели ожидаемой полезности, обобщается на нелинейные модели индивидуальных предпочтений. Вводятся количественные характеристики неприятия риска, приведены примеры их вычисления в модели возмущенной вероятности, и соответствующие иллюстрации. Отмечается связь неприятия риска с понятием диверсификации из портфельного анализа.

*Ключевые слова и фразы*: риск, неприятие риска, принятие решений, ожидаемая полезность, возмущенная вероятность, диверсификация.

## 1 Введение

Понятие неприятия риска было введено в 1964 году Дж. Праттом [1] для модели ожидаемой полезности фон Неймана – Моргенштерна [2], и изучалось также К. Эрроу [3] и многими другими авторами. Поскольку предпочтения на множестве вероятностных распределений, задаваемые функционалом ожидаемой полезности, оказываются линейными относительно операции смеси распределений, модель ожидаемой полезности можно считать лишь первым приближением к описанию истинных индивидуальных предпочтений, на что указывают, в частности, парадоксы, описанные Рабином [4], Самуэльсоном [5] и Нейлсоном [6]. В этой связи возникает проблема описания неприятия риска в нелинейных моделях предпочтений.

В настоящей работе понятие неприятия риска вводится в нескольких ракурсах. Сначала рассматривается неприятие риска, как характеристика абстрактного отношения предпочтения на множестве вещественных вероятностных распределений (или множестве соответствующих случайных величин). Отмечается связь неприятия риска с понятием диверсификации, используемым в портфельном анализе. Приводятся свойства неприятия риска в нескольких аксиоматических структурах предпочтений. Затем введенное понятие переносится в модель предпочтений, описываемых представляющими функционалами (мерами риска). При этом удается наделить неприятие риска количественным содержанием посредством одностороннего аналога производной Гато.

Далее в работе приводятся примеры вычисления неприятия риска в модели возмущенной вероятности и соответствующие иллюстрации.

[1] Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036, e-mail: anov@icm.krasn.ru



*ФАМ'2003 — II Всероссийская ФАМ конференция*
Опубликовано в 2003

В заключение обсуждаются способы применения понятия неприятия риска при принятии решений в условиях неопределенности, а также при решении обратных задач теории риска: восстановлении индивидуальных предпочтений (представляющих функционалов) по наблюдениям за процессом принятия решений.

## 2 Неприятие риска

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство. Рассмотрим множество почти наверное ограниченных случайных величин $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ и соответствующее ему множество функций распределения $\mathcal{F}$ с конечным носителем[4]. Элементы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{F}$ будем называть **рисками**. Функцию распределения случайной величины $X \in \mathcal{X}$ будем обозначать $F_X$.

Полное транзитивное бинарное отношение $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется отношением **предпочтения**. Для $X, Y \in \mathcal{X}$ запись $X \preceq Y$ трактуется, как "риск $X$ не более предпочтителен, чем риск $Y$". Несимметричная $\prec$ и симметричная $\sim$ части отношения $\preceq$ трактуются, как отношения строгого предпочтения, и безразличия (эквивалентности), соответственно. Отметим, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности в обычном смысле. Если для произвольных $X, Y \in \mathcal{X}$, имеющих одинаковые функции распределения $F_X = F_Y$, имеет место $X \sim Y$, то отношение $\preceq$ называется **регулярным**; в этом случае предпочтение на $\mathcal{X}$ естественно порождает предпочтение на $\mathcal{F}$. В настоящей работе мы будем считать отношение предпочтения $\preceq$ регулярным, монотонным относительно стохастического доминирования первого порядка [7], а также предполагать, что в каждом классе эквивалентности, порожденном им, имеется ровно одно вырожденное распределение

$$W_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

где $a \in \mathbf{R}$ – параметр распределения.

Отношение $\preceq$ на $\mathcal{X}$ можно представить [7] функционалом (мерой риска) $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ в смысле

$$X \preceq Y \iff \mu(X) \leq \mu(Y), \; X, Y \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

В случае регулярности $\preceq$ меру риска можно считать заданной на $\mathcal{F}$.

Обозначим $I \in \mathcal{X}$ случайную величину, тождественно равную 1: $I(\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$ (в частности, для вырожденного распределения имеет место $W_a = F_{aI}$, $a \in \mathbf{R}$), и введем качественное понятие неприятия риска.

**Определение 1** *Скажем, что отношение предпочтения $\preceq$ обладает свойством неприятия риска, если для произвольной невырожденной случайной величины $\Delta$ с нулевым средним: $\mathbf{E}\Delta = 0$, и произвольного $x \in \mathbf{R}$ имеет место $xI + \Delta \prec xI$. В терминах меры риска $\mu$, представляющей отношение предпочтения $\preceq$ в смысле (1), свойство неприятия риска имеет вид $\mu(xI + \Delta) < \mu(xI)$.*

---
[4] Говорят, что функция распределения $F$ на $\mathbf{R}$ имеет конечный носитель $[a, b]$, если $-\infty < a < b < \infty$, и $a = \sup\{x : F(x) = 0\}$, $b = \inf\{x : F(x) = 1\}$.

Из такого определения сразу возникает способ измерения величины неприятия риска. Рассмотрим совокупность случайных величин

$$\mathcal{C} = \{\Delta \in \mathcal{X} :\ \mathbf{E}\Delta = 0,\ \|\Delta\| = 1\}, \tag{2}$$

где

$$\|X\| = a.s. \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$$

представляет собой норму $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Зафиксируем произвольный элемент $\Delta \in \mathcal{C}$. В случае неприятия риска при каждом $h > 0$ в классе эквивалентности, содержащем $xI + h\Delta$ найдется распределение, вырожденное в точке $x - c_{x,\Delta}(h)$, причем, $c_{x,\Delta}(h) > 0$ ввиду монотонности $\preceq$ относительно стохастического доминирования. Зависимость $c_{x,\Delta}(h)$ от $h$ можно использовать для характеризации неприятия риска в точке $x$ "в направлении $\Delta$".

**Определение 2** *Пусть отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{F}$ представлено мерой риска $\mu$. Неприятием риска в точке $x$ в направлении $\Delta \in \mathcal{C}$ называется функциональное решение $c_{x,\Delta}(h)$ уравнения*

$$\mu(xI + h\Delta) = \mu[(x - c_{x,\Delta}(h))I].$$

В качестве локальной характеристики неприятия риска можно использовать предельное значение

$$c^{(\alpha)}_{x,\Delta} = \lim_{h\searrow 0} c_{x,\Delta}(h)/h^\alpha, \tag{3}$$

если оно существует при каком-либо $\alpha > 0$.

В [1] было показано, что линейное отношение предпочтения, представляемое функционалом ожидаемой полезности, обладает свойством неприятия риска в том и только в том случае, когда функция полезности является строго вогнутой. Там же была вычислена локальная характеристика вида (3) для этого отношения предпочтения. Приведем здесь эти результаты.

Пусть $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – функция полезности. Функционал ожидаемой полезности

$$\rho_U(X) = \mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dF_X(x), \quad X \in \mathcal{X}$$

оказывается регулярной мерой риска. Если функция $U$ является строго возрастающей, то функционал $\rho_U$ монотонен относительно стохастического доминирования. При этом неприятие риска оказывается эквивалентным строгой вогнутости функции $U$. Количественное выражение для неприятия риска приведено в следующей теореме.

**Теорема 1** *([1], [8]). Пусть функция полезности $U$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда неприятие риска в рамках модели ожидаемой полезности равно*

$$c_{x,\Delta}(h) = -\frac{1}{2}h^2\frac{U''(x)}{U'(x)} + o(h^2), \quad h \to 0.$$

Видно, что локальное неприятие риска можно описать показателем

$$c^{(2)}_{x,\Delta} = c^{(2)}_x = -\frac{1}{2}\frac{U''(x)}{U'(x)},$$

который в данном случае не зависит от направления $\Delta$. Величина $2c^{(2)}_x$ названа в [1] абсолютным неприятием риска (в модели ожидаемой полезности).

В [8] рассматривался аналогичный вопрос для нелинейного отношения предпочтения, представляемого функционалом возмущенной вероятности [9]

$$\pi_g(X) = -\int_0^1 F_X^{-1}(v)\,dg(1-v), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{4}$$

где $g:\ [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая функция, обладающая свойствами $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, используемая для возмущения значений вероятностной меры $\mathbf{P}$. В [8], в частности, показано, что отношение предпочтения, представляемое функционалом $\pi_g$, обладает свойством неприятия риска в том и только в том случае, когда имеет место неравенство

$$g(v) < v,\ v \in (0,1). \tag{5}$$

Там же доказана следующая теорема

**Теорема 2** *([8]). Пусть в модели возмущенной вероятности выполнено условие (5). Тогда*

$$c_{x,\Delta}(h) = -h\pi_g(\Delta), \quad x \in \mathbf{R},\ h > 0,\ \Delta \in \mathcal{C}. \tag{6}$$

Из приведенной теоремы видно, что отношение $c_{x,\Delta}/h = c^{(1)}_\Delta = -\pi_g(\Delta)$ не зависит от $x \in \mathbf{R}$ и $h > 0$, поэтому показатель $c^{(1)}_{x,\Delta} = c^{(1)}_\Delta$ характеризует как локальное, так и глобальное неприятие риска в направлении $\Delta$. Это обстоятельство позволяет вычислить для функционала $\pi_g$ еще более информативные количественные границы неприятия риска, которые особенно привлекательны с точки зрения их использования в изучении недавно введенных комбинированных функционалов [10]. Следующий параграф посвящен выводу упомянутых границ.

# 3 Границы неприятия риска

Как уже отмечалось, величина неприятия риска $c_\Delta$ в модели возмущенной вероятности зависит только от направления $\Delta$. В настоящем параграфе в нескольких частных случаях[5] вычислим диапазон, в котором могут изменяться значения $c_\Delta$, когда $\Delta$ пробегает все множество допустимых значений $\mathcal{C}$. Точнее, для заданной возмущающей функции $g$ вычислим величины

$$U_g = \sup_{\Delta\in\mathcal{C}} \pi_g(\Delta), \quad L_g = \inf_{\Delta\in\mathcal{C}} \pi_g(\Delta),$$

[5] Решение общей задачи будет опубликовано отдельно.

которые, ввиду (6), сразу дают и требуемые границы для неприятия риска в виде отрезка $R_g = [-U_g, -L_g]$. Отметим, что $|\pi_g(X)| \leq 1$ при $\|X\| = 1$, а при наличии неприятия риска верны границы $-1 \leq \pi_g(\Delta) \leq 0$ для $\Delta \in \mathcal{C}$, поэтому заведомо $R_g \subseteq [0,1]$. Близость интервала $R_g$ к 0 характеризует слабое неприятие риска, а близость его к 1 – сильное неприятие риска. Большая длина интервала $R_g$ характеризует значительную изменчивость неприятия риска по направлениям $\Delta$.

Пусть $\Omega$ конечно: $|\Omega| = n$. При этом $\mathcal{X}$ изоморфно $\mathbf{R}^n$, так что всякая случайная величина $X \in \mathcal{X}$ представляется вектором $(x_1, \ldots, x_n)$, вероятностная мера $\mathbf{P}$ имеет вид $(p_1, \ldots, , p_n)$, где $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ и $p_1 + \cdots + p_n = 1$, а произвольная вероятностная мера $Q$ на $(\Omega, \mathcal{B})$ имеет вид $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ с аналогичными условиями неотрицательности и нормировки компонент. Для этого случая в [10] доказана следующая теорема представления функционала возмущенной вероятности.

**Теорема 3** *Пусть $|\Omega| = n$. Тогда функционал возмущенной вероятности (4) можно представить в виде*

$$\pi_g(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{E}_Q X, \tag{7}$$

*где $\mathbf{E}_Q X = x_1 q_1 + \cdots + x_n q_n$ – математическое ожидание случайной величины $X \in \mathcal{X}$ относительно вероятностной меры $Q$, семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$ на $(\Omega, \mathcal{B})$ имеет вид $\mathcal{Q} = \{Q^\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, $\Gamma$ – совокупность всех $n!$ перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$, и компоненты каждой меры $Q^\gamma$ определяется посредством*

$$q^\gamma_{\gamma(k)} = g\left(\sum_{i=k}^{n} p_{\gamma(i)}\right) - g\left(\sum_{i=k+1}^{n} p_{\gamma(i)}\right). \tag{8}$$

Перейдем к рассмотрению примеров. Пусть $n = 2$, тогда $\mathbf{P} = (p, 1-p)$ при некотором $p \in (0,1)$, и произвольную вероятностную меру $Q$ на $(\Omega, \mathcal{B})$ можно представить в виде $Q = (q, 1-q)$ при некотором $q \in [0,1]$. Пусть, для определенности, $p \leq 1/2$. Тогда множество $\mathcal{C}$ (см. определение этого множества в (2)) состоит из двух точек $\Delta^{(1)} = (-1, p/(1-p))$ и $\Delta^{(2)} = (1, -p/(1-p))$. Множество всех перестановок на $\{1,2\}$ состоит из двух элементов $\Gamma = \{(1,2),(2,1)\}$, а соответствующие вероятностные меры из (8) имеют вид $Q^{(1,2)} = (1 - g(1-p), g(1-p))$, $Q^{(2,1)} = (g(p), 1 - g(p))$. Используя теорему 3, нетрудно убедиться в том, что

$$\pi_g\left(\Delta^{(1,2)}\right) = \frac{g(1-p)}{1-p} - 1, \quad \pi_g\left(\Delta^{(2,1)}\right) = \frac{g(p) - p}{1-p}.$$

При этом, например, для возмущающей функции $g(v) = v^3$ и $p = 1/3$ имеем $L_g = \pi_g\left(\Delta^{(1,2)}\right) = -5/9$ и $U_g = \pi_g\left(\Delta^{(2,1)}\right) = -4/9$, так что диапазон неприятия риска представляет собой отрезок $R_g = [4/9, 5/9]$. Множество $\mathcal{C}$ и линия, задаваемая уравнением $\mathbf{E}X = 0$, показаны на рисунке 1.

Пусть теперь $|\Omega| = 3$. В этом случае имеется 6 перестановок на множестве $\{1,2,3\}$, и столько же вероятностных мер в образующем семействе $\mathcal{Q}$. Все они приведены в

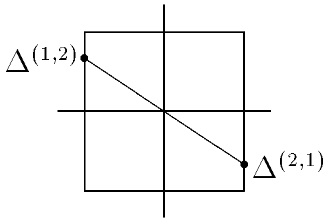


Рис. 1: Множество $\mathcal{C}$ в квадрате $[-1,1]^2$, $\mathbf{P} = (1/3, 2/3)$

таблице 1. Рассмотрим в качестве основной вероятностной меры на $(\Omega, \mathcal{B})$ меру $\mathbf{P} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Множество $\mathcal{C}$ при этом представляет собой границу шестиугольника с вершинами в точках $\Delta^\gamma$. На рисунке 2 представлен вид множества $\mathcal{C}$ в кубе $[-1,1]^3$; там же приведены координаты его вершин и определяющие их перестановки $\gamma \in \Gamma$. Выберем возмущающую функцию вида $g(v) = v^2,\ v \in [0,1]$. Нетрудно убедиться в том, что минимальное значение функционала $\pi_g$ на границе шестиугольника достигается в его вершинах, и равно $-4/9$, а максимальное значение достигается на серединах сторон шестиугольника, и равно $-1/3$. Таким образом, диапазон значений неприятия риска в данном примере равен отрезку $R_g = [1/3, 4/9]$.

| $\gamma$ | $q_1^\gamma$ | $q_2^\gamma$ | $q_3^\gamma$ |
|---|---|---|---|
| (1,2,3) | $1 - g(p_2 + p_3)$ | $g(p_2 + p_3) - g(p_3)$ | $g(p_3)$ |
| (1,3,2) | $1 - g(p_2 + p_3)$ | $g(p_2)$ | $g(p_2 + p_3) - g(p_2)$ |
| (2,1,3) | $g(p_1 + p_3) - g(p_3)$ | $1 - g(p_1 + p_3)$ | $g(p_3)$ |
| (2,3,1) | $g(p_1)$ | $1 - g(p_1 + p_3)$ | $g(p_1 + p_3) - g(p_1)$ |
| (3,1,2) | $g(p_1 + p_2) - g(p_2)$ | $g(p_2)$ | $1 - g(p_1 + p_2)$ |
| (3,2,1) | $g(p_1)$ | $g(p_1 + p_2) - g(p_1)$ | $1 - g(p_1 + p_2)$ |

Таблица 1: Вероятностные меры семейства $\mathcal{Q}$

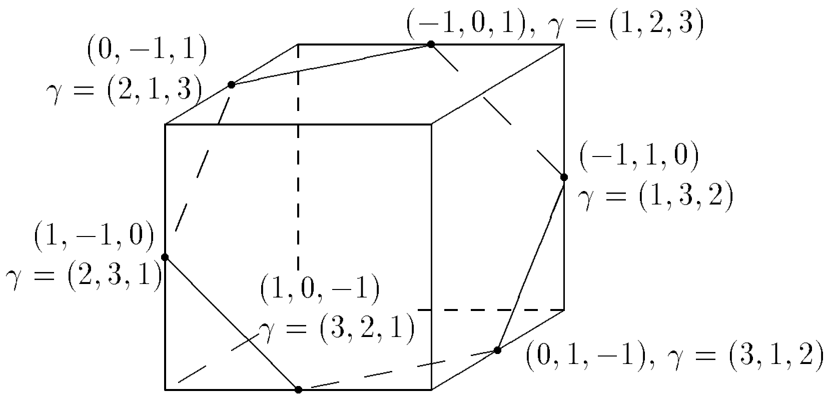


Рис. 2: Шестиугольник $\mathcal{C}$ в кубе $[-1,1]^3$, $\mathbf{P} = (1/3, 1/3, 1/3)$

Аналогично рассматривается пример с основной вероятностной мерой $\mathbf{P} = (1/4, 1/4, 1/2)$ и той же возмущающей функцией $g(v) = v^2,\ v \in [0,1]$. Ввиду совпадения двух вероятностей в $\mathbf{P}$, шестиугольник $\mathcal{C}$ вырождается в квадрат с вершинами в точках $(-1,-1,1)$, $(-1,1,0)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,0)$, значения функционала $\pi_g$ в которых равно $-1/2$, $-3/8$, $-1/2$ и $-3/8$, соответственно, а максимальное значение функционала $\pi_g$ на границах квадрата достигается в четырех внутренних точках сторон квадрата, имеющих пару совпадающих координат, например, $(-1,1/3,1/3)$, и равно $-1/4$. Таким образом, диапазон значений неприятия риска для данной модели равен $R_g=[1/4,1/2]$. Множество $\mathcal{C}$ и его характерные точки изображены на рисунке 3.

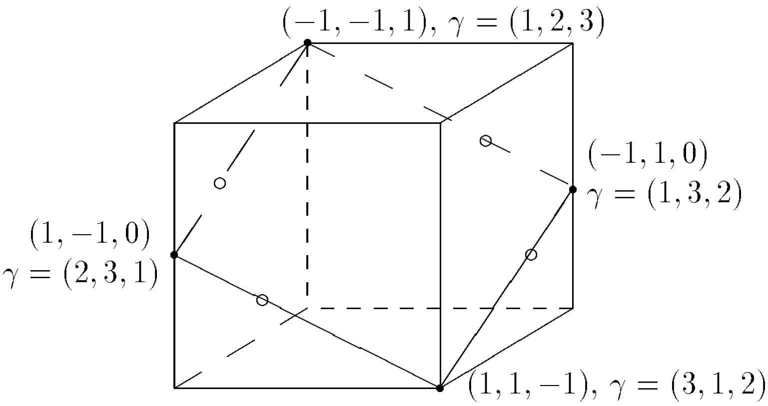


Рис. 3: Квадрат $\mathcal{C}$ в кубе $[-1,1]^3$, $\mathbf{P}=(1/4,1/4,1/2)$

# 4 Заключение

Введенное в работе понятие неприятия риска распространяет аналогичное понятие, ранее рассматривавшееся в рамках модели ожидаемой полезности, на нелинейные модели принятия решений. Качественное неприятие риска оказывается возможным определить для абстрактных отношений предпочтения на множестве рисков (вещественных вероятностных распределений), а для предпочтений, представимых функционалами (мерами риска), неприятие риска удается наделить количественным смыслом. В работе определяются соответствующие характеристики и приводятся примеры вычисления неприятия риска в нелинейной модели возмущенной вероятности. Следует отметить также тесную связь неприятия риска с понятием диверсификации [12], используемом в портфельном анализе. Дальнейшее изучение этой связи заслуживает пристального внимания.

Наличие способа количественного измерения неприятия риска открывает широкие возможности для изучения нелинейных моделей предпочтений, и позволяет перевести решение обратных задач теории риска – восстановления меры риска по наблюдениям – в сферу параметрического оценивания.

Автор выражает признательность Деборе Фриш, Биллу Хьюберу и Тони Коксу за интересное обсуждение парадокса Рабина–Нейлсона, демонстрирующего недостаточность линейных моделей ожидаемой полезности для описания индивидуального неприятия риска.

## Литература

[1] Pratt J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.

[2] J. von Neumann, O. Morgenstern (1953) *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, Princeton university press.

[3] Arrow K.J. (1971) *Essays in the Risk-Bearing*, Chicago: Markham.

[4] Rabin M. (2000) Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica*, v. 68, No. 5, 1281–1292.

[5] Samuelson P.A. (1963) Risk And Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers. Reprinted in: *CAS Forum, Summer 1994*, p. 49-56.

[6] Neilson W. (2001) Calibration Results for Rank-dependent Expected Utility. *Economics Bulletin*, v. 4, No. 10, p. 1-5.

[7] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102 с.

[8] Новоселов А.А. (2003) Неприятие риска: качественный подход и количественные оценки. *Автоматика и телемеханика*, No. 5 (будет опубликовано).

[9] Wang, S.(1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.

[10] A. Novosyolov (2003) Combined functionals as risk measures. *Proceedings of the Bowles Symposium "Fair Valuation of Contingent Claims and Benchmark Cost of Capital"*, Atlanta GA, 2003, p. 65-85.

[11] Новоселов А.А. (2001) Монотонность и выпуклость некоторых мер риска. *Proceedings of the 1st International scientific school "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems"*, SPb., p. 169-172.

[12] Новоселов А.А. (2002) Diversification in a portfolio. *Proceedings of the 1st International scientific school "Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems"*, SPb., p. 178-181.