Портфельный анализ

А.А. Новоселов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, 660036
e-mail: anov@ksc.krasn.ru

Посвящается 50-летию
современного портфельного анализа

Введение

Портфельный анализ существует, пожалуй, столько же, сколько люди задумываются о принятии рациональных решений, связанных с использованием ограниченных ресурсов. Пословицы типа "не складывать все яйца в одну корзину" присутствуют в большинстве современных человеческих языков, а история их возникновения теряется в глубине веков...

Однако момент возникновения современного портфельного анализа, пожалуй, можно датировать довольно точно, связав его с выходом в марте 1952 года пионерской работы Гарри Марковица [1]. Предложенная в этой работе модель, достаточно простая по существу, позволила ухватить основные черты финансового рынка, с точки зрения инвестора, и снабдила последнего инструментом для выработки рациональных инвестиционных решений. Модель Марковица активно применялась в практических расчетах, вплоть до резкого повышения изменчивости показателей финансовых рынков в 80-х годах 20 века. Да и сегодня ее вполне можно использовать как качественное первое приближение.

С тех пор портфельный анализ существенно продвинулся, в его рамках были построены модели рыночного равновесия, предложены разнообразные способы измерения риска, учитывались все новые и новые рыночные инструменты. Успехи теории стимулировали создание новых рыночных инструментов, которые без сложившейся солидной расчетной базы просто не могли бы возникнуть.

Олег Воробьёв (ред.), Финансово-актуарная математика и смежные вопросы, Труды ФАМ'2002, Красноярск, ИВМ СО РАН

В настоящей работе кратко рассмотрены основные методики портфельного анализа и указаны некоторые направления его дальнейшего развития. В параграфе 2 основная задача портфельного анализа представлена как задача принятия решения в условиях вероятностной неопределенности. Параграф 2 посвящен классической ветви портфельного анализа, основанной на использовании моментов распределений до второго порядка включительно. В параграфе 2 описана более общая схема портфельного анализа, формально представляемая задачами оптимизации. Последний параграф 2 посвящен примеру портфельного подхода к неколичественной ситуации.

Задача портфельного анализа

Портфельный анализ является разделом теории риска, как теории принятия решений в условиях вероятностной неопределенности [2]. Напомним общую постановку задачи теории риска и укажем уточнения общей модели, которые приводят к задаче портфельного анализа.

Общая задача теории риска

Общая задача принятия решения в условиях вероятностной неопределенности формулируется следующим образом (рисунок 1): имеются множества решений (действий) $\mathcal{D}$, состояний среды $\mathcal{S}$ и результатов $\mathcal{R}$. Результат решения индивидуума $d \in \mathcal{D}$ определяется не только самим решением, но и состоянием среды $s \in \mathcal{S}$. Эта зависимость описывается отображением

$$f:\ \mathcal{D} \times \mathcal{S}\ \to\ \mathcal{R}. \tag{1}$$

Состояние среды в момент принятия решения является неопределенным, эта неопределенность считается вероятностной и моделируется структурой вероятностного пространства $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, элементы которой считаются (частично) известными. На множестве результатов $\mathcal{R}$ также задана некоторая σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{B}$, так что $(\mathcal{R}, \mathfrak{B})$ является измеримым пространством. Мы предполагаем, что при каж-

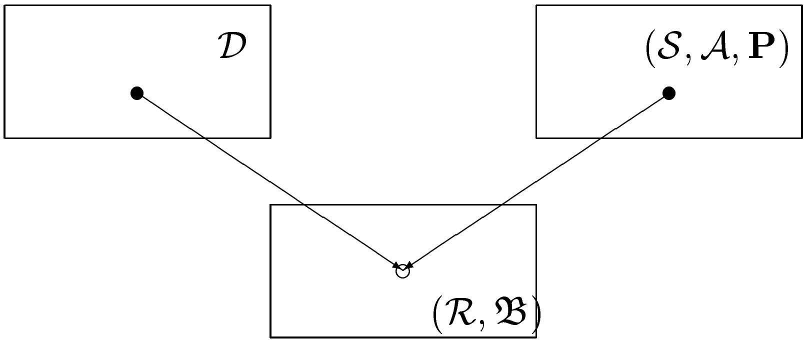

Рис. 1: Схема принятия решения

дом фиксированном $d \in \mathcal{D}$ отображение $f_d : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, задаваемое посредством $f_d(s) = f(d, s), \quad s \in \mathcal{S}$, является измеримым относительно пары σ-алгебр $\mathcal{A}, \mathfrak{B}$, то есть, $f_d^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для произвольного $B \in \mathfrak{B}$. Отсюда вытекает, в частности, что каждое решение $d \in \mathcal{D}$ порождает на $(\mathcal{R}, \mathfrak{B})$ вероятностное распределение $\mathbf{P}_d$ по правилу $\mathbf{P}_d(B) = \mathbf{P}(f_d^{-1}(B)), \quad B \in \mathfrak{B}$, а принятие наилучшего решения означает выбор элемента $d \in \mathcal{D}$, порождающего "наилучшее" распределение $\mathbf{P}_d$.

Для формализации понятия "лучше" на множестве вероятностных распределений $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_d, \ d \in \mathcal{D}\}$ вводится отношение предпочтения $\preceq$ [2], [3], то есть полное транзитивное отношение. Задача теории риска заключается в выборе решения $d_* \in \mathcal{D}$ такого, что $\mathbf{P}_d \preceq \mathbf{P}_{d_*}, \ \ d \in \mathcal{D}$.

В [3] было показано, что для любого отношения предпочтения на $\mathcal{P}$, обладающего некоторыми свойствами линейности, можно подобрать такую функцию полезности $U : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$, что функционал ожидаемой полезности

$$u(P) = \int_{\mathcal{R}} U(x)\, dP(x), \quad P \in \mathcal{P} \tag{2}$$

представляет отношение $\preceq$ в смысле

$$P \preceq Q \iff u(P) \leq u(Q), \quad P, Q \in \mathcal{P}. \tag{3}$$

Отметим, что функционал u линеен относительно операции смеси распределений:

$$u(\alpha P + (1-\alpha)Q) = \alpha u(P) + (1-\alpha)u(Q); \quad P, Q \in \mathcal{P}, \ \alpha \in [0,1].$$

Поэтому нелинейные отношения предпочтения не могут быть представлены никаким функционалом ожидаемой полезности.

В [2] приведена аналогичная теорема о представлении нелинейных отношений предпочтения, удовлетворяющих некоторым естественным условиям, вещественными функционалами $\mu : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ в смысле, аналогичном (3):

$$P \preceq Q \iff \mu(P) \leq \mu(Q), \quad P, Q \in \mathcal{P}. \tag{4}$$

Знание функционала, представляющего отношение предпочтения, позволяет свести качественную задачу поиска наилучшего распределения к более простой задаче оптимизации на функциональном пространстве, а в некоторых случаях – и в $\mathbf{R}^n$.

Частный случай: задача портфельного анализа

Задача портфельного анализа выделяется из общей задачи теории риска специальным строением множества решений и вероятностного пространства, описывающего состояния среды. Множество решений $\mathcal{D}$ в этой задаче является подмножеством в $\mathbf{R}^n$, точнее – лежит в гиперплоскости L, задаваемой соотношением

$$L = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \mid y_1 + \ldots + y_n = 1\}, \tag{5}$$

то есть $\mathcal{D} \subseteq L$. В некоторых случаях, по содержательному смыслу задачи, компоненты вектора y должны быть неотрицательными, тогда множество решений представляет собой *стандартный симплекс* $\mathbf{S}_n$ в $\mathbf{R}^n$:

$$\mathcal{D} = \mathbf{S}_n = \{y \in L \mid y_1 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0\}. \tag{6}$$

Часто допустимые решения допускают наличие отрицательных компонент, тогда множество решений получается шире, чем в (6). В общем случае накладывается лишь ограничение $\mathcal{D} \subseteq L$, и, возможно, предполагается ограниченность $\mathcal{D}$.

Состояние среды в задаче портфельного анализа описывается вектором $s = (s_1, \ldots, s_n)$ со значениями в $\mathcal{S} = \mathcal{R}^n$, где $\mathcal{R}$ – (вообще говоря, абстрактное) множество результатов, а неопределенность состояний среды моделируется совместным распределением $\mathbf{P}$ случайного вектора $\overset{\circ}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ на измеримом пространстве $(\mathcal{R}^n, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ представляет собой σ-алгебру подмножеств $\mathcal{R}^n$.

Основным объектом портфельного анализа до сих пор являлась задача, в которой результаты представлялись вещественными числами: $\mathcal{R} = \mathbf{R}$, при этом множество состояний среды совпадает с $\mathbf{R}^n$, и вероятностное распределение на нем есть по существу распределение случайного вектора. Отображение (1) в данной задаче имеет вид

$$X_y = f(y, \overset{\circ}{X}) = y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n, \tag{7}$$

и при каждом фиксированном решении $y \in \mathcal{D}$ значение этого отображения представляет собой случайную величину X_y. Принятие рационального решения в данном контексте означает выбор решения $y \in \mathcal{D}$, порождающего X_y с "наилучшим" распределением.

Компоненты вектора $\overset{\circ}{X}$ трактуются в этой задаче как доходности инструментов, а случайная величина X_y представляет собой доходность портфеля с весами y.

Диверсификация

В портфельном анализе активно используется понятие диверсификации, которое неформально можно описать, как предпочтительность распределения инвестиционных ресурсов между инструментами. Поэтому естественным средством формализации этого понятия является его представление в терминах отношения предпочтения на множестве распределений.

Один из способов такой формализации заключается в следующем. Пусть, в рамках задачи предыдущего пункта, $n = 2$ и компоненты случайного вектора (X_1, X_2) имеют одинаково предпочтительные распределения: $X_1 \sim X_2$[1]. Тогда смесь этих компонент $X_y = y_1 X_1 + y_2 X_2$

[1] Здесь используется естественное соглашение: случайные величины X, Y эквивалентны, $X \sim Y$, если их функции распределения эквивалентны: $F_X \sim F_Y$, то есть, одновременно $F_X \preceq F_Y$ и $F_Y \preceq F_X$.

не менее предпочтительна, чем каждая из компонент:

$$X_1 \preceq X_y, \quad y \in \mathbf{S}_2. \tag{8}$$

Стоит отметить, что эквивалентность распределений X_1, X_2 по предпочтению не содержит никакой информации относительно характера зависимости компонент X_1, X_2, в то время, как последняя существенно влияет на распределение X_y. Поэтому (8) должно выполняться при *любом совместном распределении* (X_1, X_2) с заданными маргинальными распределениями.

Портфели второго порядка

В данном параграфе рассмотрим принципы формирования портфелей, основанных на информации о распределении $\overset{\circ}{X}$ в виде моментов до второго порядка включительно; результат применения этих принципов естественно называть портфелями второго порядка. Будем обозначать известные моменты

$$m = (m_1, \ldots, m_n)^T, \quad V = (v_{ij})_{i,j=1,\ldots,n},$$

где

$$m_i = \mathbf{E}X_i, \quad v_{ij} = \mathbf{E}\left[(X_i - m_i)(X_j - m_j)\right], \quad i, j = 1, \ldots, n$$

обозначены средние значения компонент и их ковариации, соответственно. Ковариационная матрица V, как известно, является симметричной и неотрицательно определенной.

С помощью элементарной линейной алгебры нетрудно выразить среднее значение и дисперсию доходности портфеля X_y через параметры инструментов m, V и веса портфеля y:

$$\mathbf{E}X_y = m^T y, \quad \mathbf{D}X_y = y^T V y. \tag{9}$$

Всюду далее мы будем предполагать матрицу V невырожденной[2].

[2] Вырожденность матрицы V означает, что распределение $\overset{\circ}{X}$ сосредоточено на линейном многообразии (гиперплоскости) размерности, меньшей n; в этом случае с помощью замены переменных задачу всегда можно перевести в пространство меньшей размерности с невырожденной ковариационной матрицей новых инструментов.

Минимизация дисперсии

Предположим, что все компоненты вектора инструментов $\overset{\circ}{X}$ имеют одинаковые средние: $m = (a, \ldots, a)$. В этом случае среднее значение доходности любого портфеля X_y также равно a и интуитивно представляется более предпочтительным портфель с меньшей дисперсией. Так мы приходим к задаче квадратичного программирования

$$y^T V y \;\to\; \min_y \tag{10}$$

$$I^T y = 1, \tag{11}$$

где $I = (1, \ldots, 1)^T$, так что (11) представляет собой, по существу, ограничение $y \in L$, см. (5). Решение задачи (10), (11) легко получается методом множителей Лагранжа:

$$y_* = \frac{V^{-1} I}{I^T V^{-1} I}. \tag{12}$$

При наличии дополнительных ограничений на y, например, вида $y \in \mathbf{S}_n$ (см. (6)), решение не всегда удается записать аналитически, но численные методы решения задач квадратичного программирования в любом случае быстро обеспечивают необходимый результат.

Проиллюстрируем свойства задачи (10), (11) на следующем примере. Пусть $n = 2$, и

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

где $\rho \in (-1, 1)$ – коэффициент корреляции X_1 и X_2[3]. Обозначив $v = y_1$, из (11) получаем $y_2 = 1 - v$, и целевая функция задачи (10) записывается в виде

$$f(v) = 1 - 2(1 - \rho) v (1 - v).$$

Минимум f достигается, очевидно, при $v = 1/2$, а минимальная дисперсия равна $(1 + \rho)/2$. Отметим, что для крайних случаев $\rho = 1$ дисперсия доходности портфеля равна 1 и не зависит от его состава, а

[3] При $\rho = \pm 1$ матрица V оказывается вырожденной, а распределение случайного вектора (X_1, X_2) – (при нулевых средних) сосредоточенным на одной из прямых $x_1 = \pm x_2$.

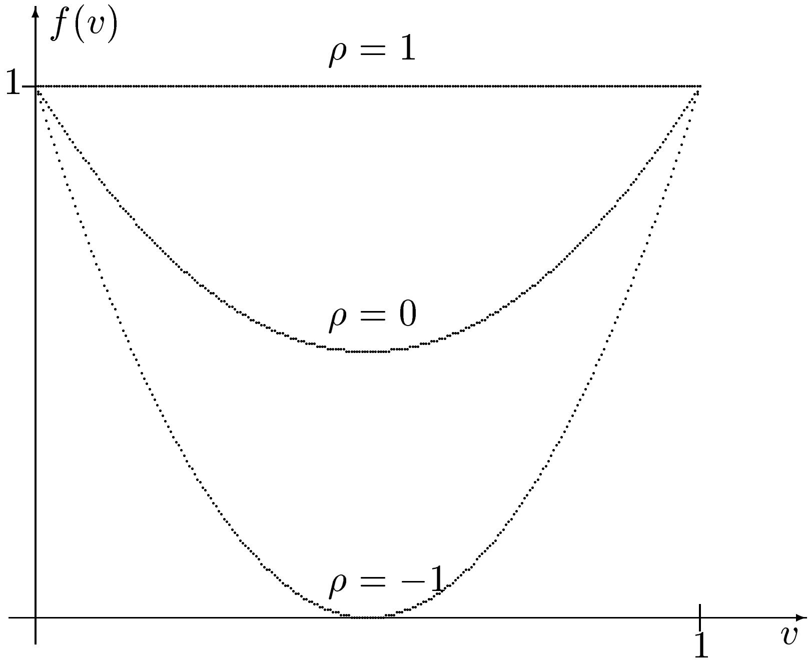

Рис. 2: Зависимость дисперсии портфеля от его состава

для $\rho = -1$ минимальная дисперсия обращается в 0! Последний случай соответствует идеальной диверсификации, достижимой лишь при идеальной отрицательной зависимости инструментов. На рисунке 2 приведены графики функции f при различных значениях коэффициента корреляции.

Векторная оптимизация, эффективные решения

Теперь рассмотрим более общий случай, когда средние доходности инструментов могут различаться. При этом изменение состава портфеля влечет изменение не только его дисперсии, но и средней доходности. Более предпочтительными инвестору представляются портфели с меньшей дисперсией и большей средней доходностью, однако не всякое изменение состава портфеля будет приводить к согласованному изменению этих показателей в нужном направлении.

Возникает проблема, стандартная для так называемой *векторной оптимизации*. Для ее разрешения вводится понятие *эффективного решения*, обобщающего понятие решения обычной задачи оптимизации. Эффективным называется такое решение, при вариации которого улучшение значений некоторых критериев возможно лишь за счет одновременного ухудшения значений других критериев.

В нашем случае эффективным будет всякое решение (портфель), для которого нельзя (оставаясь в рамках допустимого множества) повысить ожидаемую доходность $\nu = m^T y$, не повысив одновременно дисперсию портфеля $\sigma^2 = y^T V y$, и нельзя снизить дисперсию, не снизив одновременно ожидаемую доходность.

Задача Марковица

Марковиц в [1] выяснил строение допустимого множества задачи на критериальной плоскости (ν, σ^2), которое оказалось внутренностью параболы, изображенной на рисунке 3. Нетрудно заметить, что эффективным множеством является верхняя ветвь этой параболы. На рисунке изображено также неэффективное решение (черная точка) и отмечен сектор направлений (влево-вверх), перемещение по которым приводит к улучшению обоих критериев. Вершина параболы (см., например, [2]) находится в точке с координатами $\nu_* = (m^T V^{-1} I)/(I^T V^{-1} I)$, $\sigma_*^2 = 1/(I^T V^{-1} I)$ и соответствует решению задачи (10), (11), совпадающему с (12).

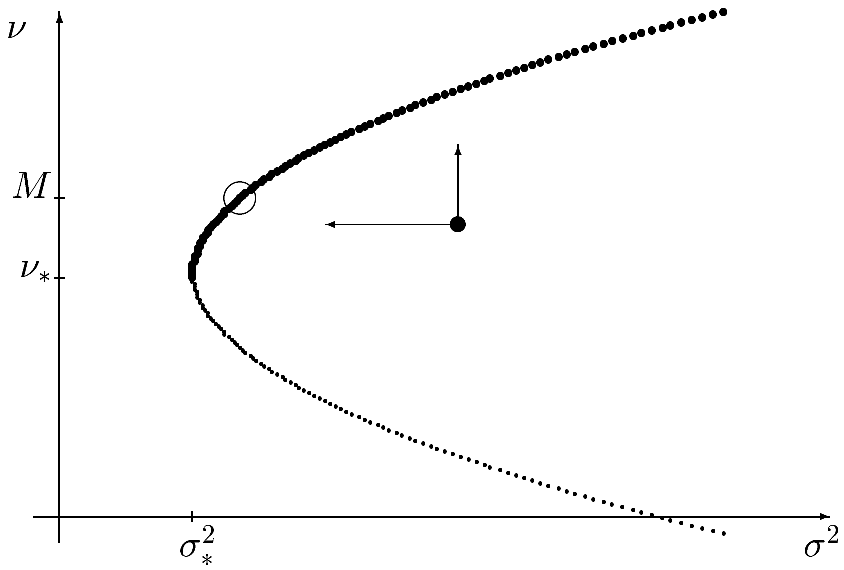

Рис. 3: Допустимое множество на критериальной плоскости

В [1] предложен также метод отыскания эффективных решений векторной задачи, который заключается в следующем. Зафиксируем произвольный уровень ожидаемой доходности $M \geq \nu_*$, рассмотрим ограничение

$$m^T y = M \tag{13}$$

и решим задачу (10), (11), (13). Таким образом получается решение, соответствующее заданному значению параметра M. Варьируя значение этого параметра в указанном диапазоне, можно получить любое эффективное решение.

Марковиц уже в [1] отмечал недостаток дисперсии как показателя качества сформированного портфеля и предлагал, в частности, использовать в качестве альтернативы одностороннюю дисперсию, "штрафующую" только за отклонения от среднего значения в неблагоприятную сторону. Этот показатель не получил широкого распространения ввиду возникающих при его использовании аналитических сложностей.

Еще одним недостатком дисперсии, как мерила качества, является игнорирование асимметрии распределений. На рисунке 4 приведены графики функции вероятности широко известного примера пары распределений, обладающих одинаковыми средними значениями и дисперсиями, но существенно различных по предпочтению. Функции этих распределений имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 10 \\ 1, & 10 < x \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} 0, & x < 8 \\ 0.9, & 8 \leq x < 18 \\ 1, & 18 < x \end{cases},$$

а средние значения и дисперсии равны 9.

Приведем здесь еще один пример, в котором решение задачи Марковица дает результат, резко противоречащий интуиции. Здесь $n = 3$, а параметры распределения $\overset{\circ}{X}$ выбраны следующими: компоненты $\overset{\circ}{X}$ независимы и имеют равномерные распределения со средними 1, 2, 3 соответственно и одинаковыми дисперсиями, равными s^2. При $s < 1/(2\sqrt{3})$ носители этих равномерных распределений попарно не пересекаются, поэтому инвестиционное решение очевидно: если операции займа (коротких продаж) не допускаются (компоненты вектора y должны быть неотрицательными), то нужно весь капитал вложить в третий инструмент, приносящий достоверно большую доходность,

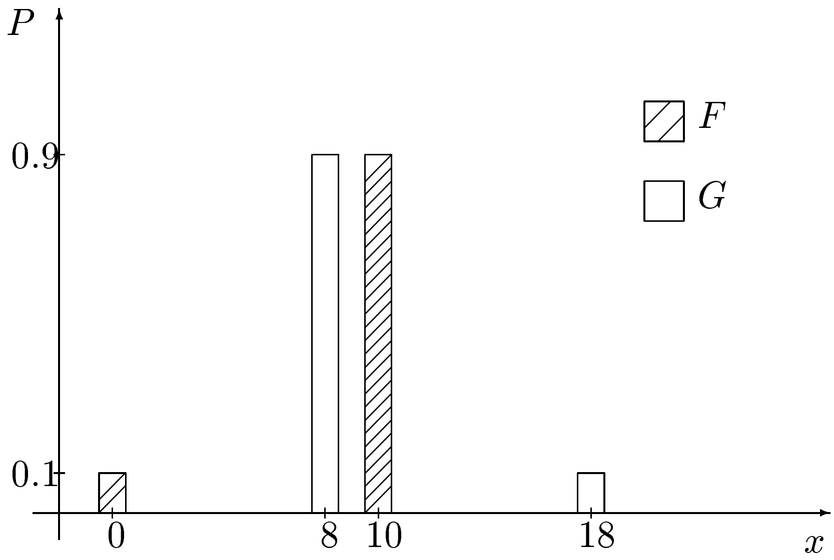

Рис. 4: Распределения с одинаковыми средними и дисперсиями

чем два других. Если же операции займа допустимы, то нужно занять максимально возможное количества капитала в первых двух инструментах и все вложить в третий. Задача Марковица дает принципиально иное решение

$$y_* = \left(-\frac{M}{2} + \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{M}{2} - \frac{2}{3}\right)^T,$$

в котором треть имеющегося капитала безусловно инвестируется во второй инструмент.

Меры риска в портфельном анализе

Другой подход к формированию портфеля состоит в подборе некоторого вещественного функционала $\mu: \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ (меры риска) на множестве функций распределения портфелей $\mathcal{F}$, оптимизация которого на допустимом множестве решений $\mathcal{D}$ давала бы "наилучший" портфель. Как было показано в [2], этот подход в действительности является обобщением подхода Марковица, поскольку задача Марковица представима в виде минимизации функционала $a\delta(F) - \varepsilon(F)$, где δ, ε – среднее значение и дисперсия случайной величины с функцией распределения F, а параметр a находится во взаимно-однозначном соответствии с параметром задачи Марковица M.

В данном параграфе мы упомянем два класса мер риска, один из которых (ожидаемая полезность) уже давно с успехом применяется в портфельном анализе, а второй (возмущенная вероятность), по-видимому, также скоро станет привычным и повседневным инструментом.

Ожидаемая полезность

В [3] была построена аксиоматическая система, на которой основано использование функционала ожидаемой полезности. В аксиомах фон Неймана - Моргенштерна по существу постулируется линейность отношения предпочтения относительно операции смеси распределений, поэтому метод ожидаемой полезности дает приемлемые результаты в тех случаях, когда реальные индивидуальные предпочтения хорошо аппроксимируются линейной моделью.

Пусть $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – некоторая вещественная функция (функция полезности). Функционал

$$u(F) = \int_{\mathbf{R}} U(x)\, dF(x), \quad F \in \mathcal{F} \tag{14}$$

представляет меру риска, называемую *ожидаемой полезностью*. Если X – случайная величина с функцией распределения F, то можно записать значение функционала u для этой случайной величины в виде $u(X) = \mathbf{E}U(X)$. Задача портфельного анализа формулируется с помощью функционала ожидаемой полезности следующим образом:

$$\mathbf{E}U(X_y) \ \to \ \min_y$$

$$I^T y = 1,$$

где X_y задано в (7), а $I = (1, \ldots, 1)^T$.

Возмущенная вероятность

В [4], [5] был введен функционал возмущенной вероятности вида

$$\pi(F) = \int_{-\infty}^{0} [g(1 - F(x)) - 1]\, dx + \int_0^{\infty} g(1 - F(x))\, dx, \quad F \in \mathcal{F}. \tag{15}$$

Здесь монотонная функция $g : [0,1] \to [0,1]$, обладающая свойствами $g(0) = 0,\ g(1) = 1$, служит возмущением вероятностной меры. Функционал (15) способен представлять нелинейные отношения предпочтения, что позволяет ожидать от него большей гибкости при применении в портфельном анализе, чем от функционала ожидаемой полезности. Эта проблема является пока мало изученной, и представляет собой широкое поле деятельности.

Представление отношения предпочтения мерой риска

Большой интерес вызывает проблема представления индивидуального предпочтения мерой риска. Для класса линейных предпочтений эта проблема была в принципе решена в [3], хотя конструктивные методы построения функционала ожидаемой полезности еще предстоит разработать. Для нелинейных предпочтений проблема существенно сложнее; здесь известны пока лишь отдельные результаты о представлении, один из которых можно найти в [2].

Портфель заболеваний

Пусть $\mathfrak{X}$ – конечное множество заболеваний, встречающихся в интересующем нас географическом регионе, а K – случайное множество под $\mathfrak{X}$, описывающее случайного больного [6]. Предположим, что у нас имеются ресурсы (единичный капитал), которые можно использовать различным образом. Например, можно весь капитал направить на приобретение современных лекарств, добившись снижения заболеваемости лекарственными методами; в результате случайный больной будет описываться распределением некоторого случайного множества K_1. Возможен и другой вариант использования ресурсов: направить все средства на проведение профилактических мероприятий, что даст распределение случайного больного K_2. Наконец, можно применить смешанную стратегию, направив долю $y_1 \in [0,1]$ на приобретение лекарств, а оставшийся капитал $y_2 = 1 - y_1$ – на профилактические мероприятия. Результатом будет распределение некоторого случайного множества K_y, где $y = (y_1, y_2)$ – вектор долей капитала. Распределение K_y можно считать непрерывной функцией y, причем, очевидно, $K_{(1,0)} = K_1$ и $K_{(0,1)} = K_2$. Таким образом, в данной задаче имеем $\overset{\circ}{X} = (K_1, K_2)$ и $f(\overset{\circ}{X}, y) = K_y$. Построение отображения f представляет собой отдельную нетривиальную проблему.

Заключение

В работе предпринята попытка проследить путь развития портфельного анализа от пионерской работы Гарри Марковица до наших дней в контексте проблематики принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В заключение отметим, что к настоящему времени в арсенале средств портфельного анализа накоплено большое количество аналитических методов и мер риска, и в будущем можно ожидать переноса основного внимания на качественные вопросы анализа, включая исследование индивидуальных предпочтений и описание ситуаций с неколичественными результатами.

Автор выражает признательность участникам ФАМ Семинара за первое знакомство с идеями портфельного анализа и незатухающую плодотворную критику.

Литература

[1] Markowitz H. (1952) *Portfolio selection.*– Journal of Finance, 1952, March, 77–91.

[2] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: Наука, 102 с.

[3] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[4] Wang, S. (1996) Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, **26**, 71–92.

[5] Young V.R. (1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.

[6] Иванкова Е.И. (1997) Случайно – множественный анализ в финансировании медицинского страхования. *Записки ФАМ Семинара*, ИВМ СО РАН, Красноярск, **1**, 127–135.