О свойствах монотонности и выпуклости некоторых мер риска

А.А.Новоселов[1] [2]

Аннотация

В работе рассматриваются свойства монотонности мер риска относительно некоторых естественных частичных порядков на множестве распределений, а также исследуется выпуклость (вогнутость) этих функционалов.

Содержание

[1]Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, Красноярск, 660036. email: anov@ksc.krasn.ru

[2]Работа поддержана Фондом "Открытое общество" (Фонд Сороса), грант 785/1998

1. Введение

Для сравнения рисков (вероятностных распределений) используются меры риска – функционалы на пространствах рисков. "Хорошие" меры риска должны быть согласованы с естественными порядками, имеющимися на множестве вероятностных распределений. Для использования их в задачах оптимизации, например, при выборе инвестиционного портфеля, желательно также, чтобы мера риска, будучи заданной на подходящем пространстве, была выпуклой (вогнутой). В настоящей работе в качестве рисков рассматриваются вещественные случайные величины, изучаются ожидаемая полезность и мера возмущенной вероятности, и исследуются их монотонность и выпуклость на пространствах случайных величин, распределений и векторов – портфелей.

2. Основные понятия и определения

В данном параграфе вводятся понятия риска, как множества случайных величин или их распределений, и меры риска, как функционала на пространстве рисков. Рассматриваются некоторые естественные способы частичного упорядочения пространства рисков. Приведены определения мер риска, свойства которых изучаются в настоящей работе.

2.1. Риск

В данном пункте дается определение риска и рассматриваются различные способы его задания: в виде случайной величины, распределения на измеримом пространстве, основной и дополнительной функции распределения.

2.1.1. Понятие риска

Пусть $(\mathbf{R},\mathcal{B})$ – измеримое пространство, образованное вещественной прямой $\mathbf{R}$ и σ – алгеброй ее борелевских подмножеств $\mathcal{B}$. Совокупность всевозможных распределений $\mathbf{P}$ на $(\mathbf{R},\mathcal{B})$ обозначим $\mathcal{P}$. Часто вместо распределений будем рассматривать соответствующие им функции распределения F на $\mathbf{R}$:

$$F(v) = \mathbf{P}\{(-\infty, v]\}, \quad v \in \mathbf{R}.$$

Совокупность всех таких функций распределения обозначим $\mathcal{F}$. Рассмотрим вероятностное пространство $([0,1],\mathcal{B}_0,\lambda)$, где $\mathcal{B}_0$ – множество борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, а λ – мера Лебега на нем. С каждой функцией распределения $F \in \mathcal{F}$ свяжем *каноническую* случайную величину X_F, заданную на $([0,1],\mathcal{B}_0,\lambda)$ по правилу

$$X_F(\omega) = F^{-1}(\omega), \quad \omega \in [0,1].$$

Совокупность всех таких случайных величин обозначим $\mathcal{X}$, а подмножество случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание – $\widetilde{\mathcal{X}}$:

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{X \in \mathcal{X} | \ |\mathbf{E}X| < \infty\}. \tag{2.1}$$

Нам понадобится еще также декумулятивная (дополнительная) функция распределения

$$S_X(v) = 1 - F_X(v) = \mathbf{P}\{X > v\},\ \ v \in \mathbf{R}.$$

Совокупность всех дополнительных функций распределения будем обозначать $\mathcal{S}$, а подмножества в $\mathcal{F}, \mathcal{S}$ функций распределения с конечным математическим ожиданием – $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$, соответственно. Выделим подмножества неотрицательных случайных величин

$$\mathcal{X}_0 = \{X \in \mathcal{X} | \mathbf{P}_X\{\mathbf{R}_+\} = 1\},\ \ \widetilde{\mathcal{X}_0} = \{X \in \widetilde{\mathcal{X}} | \mathbf{P}_X\{\mathbf{R}_+\} = 1\},$$

и соответствующие множества функций распределения

$$\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F}:\ F(0-) = 0\},\ \ \mathcal{S}_0 = \{F \in \mathcal{S}:\ S(0-) = 1\}$$

и дополнительных функций распределения

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \{F \in \widetilde{\mathcal{F}}:\ F(0-) = 0\},\ \ \widetilde{\mathcal{S}}_0 = \{F \in \widetilde{\mathcal{S}}:\ S(0-) = 1\},$$

где $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$. Если $F \in \mathcal{F}$ соответствует распределению $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, то для случайной величины X_F будем также использовать обозначение $X_{\mathbf{P}}$. Функцию распределения, соответствующую случайной величине X будем обозначать F_X:

$$F_X(v) = \mathbf{P}\{X \le v\},\ \ v \in \mathbf{R},$$

соответствующее распределение – $\mathbf{P}_X$:

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}\{X \in B\},\ \ B \in \mathcal{B}.$$

Пусть $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ – некоторое распределение, F, S, X – соответствующие ему функции распределения и случайная величина. Для математического ожидания X будем использовать в дальнейшем обозначения $\mathbf{E}X = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} = \mathbf{E}_F = \mathbf{E}_S$, а для дисперсии: $\mathbf{D}X = \mathbf{D}_{\mathbf{P}} = \mathbf{D}_F = \mathbf{D}_S$.

Определение 2.1. **Риском** *в данной работе будем называть произвольную случайную величину $X \in \mathcal{X}$, а также, при необходимости, связанные с ней распределение $\mathbf{P}_X$ и функции распределения F_X, S_X.*

Определение 2.2. *Риски $X_1, ..., X_n$ называются комонотонными, если существует риск Z и неубывающие функции $f_1, ..., f_n$ такие, что $X_1 = f_1(Z), ..., X_n = f_n(Z)$.*

2.1.2. Тестовые риски

При доказательстве свойств мер риска будут использоваться следующие тестовые риски. Для произвольного $a \in \mathbf{R}$ обозначим V_a вырожденный риск:

$$\mathbf{P}\{V_a = a\} = 1.$$

Будем обозначать F_a, S_a соответствующие функции распределения.

Введем двуатомический риск $A_{v,w,p}$, где $v, w \in \mathbf{R}$, $p \in [0, 1]$:

$$\mathbf{P}\{A_{v,w,p} = v\} = 1 - p,\ \ \mathbf{P}\{A_{v,w,p} = w\} = p. \tag{2.2}$$

Частным случаем двуатомического риска является бернуллиевский риск B_p, $p \in [0,1]$ с распределением

$$\mathbf{P}\{B_p = 1\} = p, \ \ \mathbf{P}\{B_p = 0\} = 1 - p. \tag{2.3}$$

Отметим значения моментов для типовых рисков:

$$\mathbf{E}V_a = a, \ \ \mathbf{D}V_a = 0, \quad \mathbf{E}B_p = p, \ \ \mathbf{D}B_p = p(1-p). \tag{2.4}$$

2.2. Естественные порядки на множестве рисков

В данном разделе определяются некоторые известные частичные порядки на $\mathcal{X}$.

2.2.1. Стохастическое доминирование

Определение 2.3. *Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$. Говорят, что риск X_1 предшествует X_2 в смысле первого стохастического доминирования: $X_1 \preceq_1 X_2$, если для соответствующих декумулятивных функций распределения выполняется соотношение*

$$S_{X_1}(v) \le S_{X_2}(v), \ \ v \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что если $X_1 \preceq_1 X_2$ и $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}$, то $\mathbf{E}X_1 \le \mathbf{E}X_2$.

Определение 2.4. *Пусть $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}_0$. Говорят, что риск X_2 опаснее X_1: $X_1 \preceq_D X_2$, если $\mathbf{E}X_1 \le \mathbf{E}X_2$ и существует точка $v_0 \ge 0$ такая, что*

$$\begin{aligned} S_{X_1}(v) \ge S_{X_2}(v), \ \ v < v_0 \\ S_{X_1}(v) \le S_{X_2}(v), \ \ v \ge v_0 \end{aligned}$$

Определение 2.5. *Пусть $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}_0$. Говорят, что риск X_1 предшествует риску X_2 в смысле второго стохастического доминирования: $X_1 \preceq_2 X_2$, если найдется конечная совокупность рисков $U_1, ..., U_N$ такая, что*

$$X_1 \preceq_D U_1 \preceq_D U_2 ... \preceq_D U_N \preceq_D X_2.$$

Замечание 2.1. *В [8] для второго стохастического доминирования используется термин "порядок стоп-лосс".*

Замечание 2.2. *Утверждение $X_1 \preceq_2 X_2$ эквивалентно следующему [2]:*

$$\int_v^\infty S_{X_1}(t)\,dt \le \int_v^\infty S_{X_2}(t)\,dt, \ \ v \in \mathbf{R}_+.$$

Замечание 2.3. *Для $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}_0$ справедливо*

$$X_1 \preceq_1 X_2 \Longrightarrow X_1 \preceq_D X_2 \Longrightarrow X_1 \preceq_2 X_2.$$

Нам понадобится следующая лемма, связывающая понятие комонотонности рисков с порядком стоп-лосс.

Лемма 2.1. *Предположим, что компоненты случайных векторов $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ имеют одинаковые маргинальные функции распределения*

$$F_i(x) = \mathbf{P}\{X_i \le x\} = \mathbf{P}\{Y_i \le x\}, \ \ i = 1, ..., n, \ x \in \mathbf{R}_+,$$

и компоненты вектора Y комонотонны. Тогда $X_1 + ... + X_n \preceq_2 Y_1 + ... + Y_n$.

Доказательство. Лемма непосредственно вытекает из теорем 2.8 и 2.6 из [8].

2.2.2. Неприятие риска

Этот частичный порядок $\preceq_A$ вводится на $\widetilde{\mathcal{X}}$, в соответствии с ним любой риск "хуже" вырожденного риска $V_{\mathbf{E}X}$ с тем же математическим ожиданием:

$$X \preceq_A V_{\mathbf{E}X}. \tag{2.5}$$

Противоположный порядок $V_{\mathbf{E}X} \preceq_L X$ может быть истолкован, как склонность к риску.

2.3. Меры риска

Мерой риска будем называть произвольный функционал μ, заданный на множестве рисков $\mathcal{X}$ или некотором его подмножестве $\mathcal{X}_\mu \subseteq \mathcal{X}$:

$$\mu : \mathcal{X}_\mu \to \mathbf{R}. \tag{2.6}$$

Мы будем считать, что значения меры риска вполне определяются распределением риска, и не зависят от его конкретного представления (все рассматриваемые в настоящей работе меры риска обладают этим свойством), поэтому меру риска можно рассматривать также, как функционал, заданный на множестве функций распределения $\mathcal{F}$ или некотором его подмножестве $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}$:

$$\mu : \mathcal{F}_\mu \to \mathbf{R}. \tag{2.7}$$

Смысл, в котором используется термин "мера риска" в каждом конкретном случае, будет ясен из контекста, или будет явно указываться.

Определение 2.6. *Мера риска μ называется неубывающей (невозрастающей) относительно частичного порядка $\preceq$, если*

$$X \preceq Y \Longrightarrow \mu(X) \leq \mu(Y) \;\; (\mu(X) \geq \mu(Y)).$$

Определение 2.7. *Мера риска μ называется выпуклой по значению, если ее область определения $\mathcal{X}_\mu$ является выпуклым множеством в $\mathcal{X}$ и*

$$\mu(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\mu(X) + (1-\alpha)\mu(Y); \;\; X, Y \in \mathcal{X}_\mu, \; \alpha \in [0,1].$$

Отметим, что выпуклая по значению мера риска μ при любом $n \geq 2$ обладает также свойством:

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(X_i), \;\; X_i \in \mathcal{X}_\mu, \; \alpha_i \geq 0, \, i = 1, ..., n, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{2.8}$$

Определение 2.8. *Мера риска μ называется выпуклой по распределению, если ее область определения $\mathcal{F}_\mu$ является выпуклым множеством в $\mathcal{F}$ и*

$$\mu(\alpha F + (1-\alpha)G) \leq \alpha\mu(F) + (1-\alpha)\mu(G); \;\; F, G \in \mathcal{F}_\mu, \; \alpha \in [0,1].$$

Определение 2.9. *μ называется вогнутой по значению или по распределению, если $-\mu$ является выпуклой в соответствующем смысле.*

Определение 2.10. *μ называется линейной по значению или по распределению, если она является как выпуклой, так и вогнутой в соответствующем смысле.*

Определение 2.11. *μ называется субаддитивной (супераддитивной), если для всех рисков $X, Y \in \mathcal{X}_\mu$ выполняется $\mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$ $(\mu(X+Y) \geq \mu(X) + \mu(Y))$.*

Введем еще понятие выпуклости по портфелю. Пусть $X_1, ..., X_n \in \mathcal{X}_\mu$ – произвольные риски. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ плоскость

$$J = \left\{ y = (y_1.,,,.y_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \right\},$$

обозначим $R(y) = y_1 X_1 + ... + y_n X_n$, и введем функцию $f_\mu(y) = \mu(R(y))$ на J. Отметим, что функция R линейна по y.

Определение 2.12. *Мера риска μ называется выпуклой по портфелю, если для любого $n \geq 1$ и любого фиксированного набора рисков $X_1, ..., X_n$ функция f_μ является выпуклой на J.*

Оказывается, что выпуклость μ по значению и выпуклость по портфелю эквивалентны, а именно, справедлива

Теорема 2.1. *Мера риска μ выпукла по значению тогда и только тогда, когда она выпукла по портфелю.*

Доказательство. Пусть μ выпукла по значению. Зафиксируем два вектора $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$ из J и число $\alpha \in [0,1]$. Обозначив $Y = R(y), Z = R(z)$, имеем:

$$\begin{aligned} f_\mu(\alpha y + (1-\alpha) z) = \mu(R(\alpha y + (1-\alpha) z)) = \mu(\alpha R(y) + (1-\alpha) R(z)) \\ = \mu(\alpha Y + (1-\alpha) Z) \leq \alpha\mu(Y) + (1-\alpha)\mu(Z) = \alpha\mu(R(y)) + (1-\alpha)\mu(R(z)) \\ = \alpha f_\mu(y) + (1-\alpha) f_\mu(z), \end{aligned}$$

что означает выпуклость f_μ.

Пусть теперь f_μ выпукла. Требуется показать, что для произвольных рисков Y, Z и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ справедливо

$$\mu(\alpha Y + (1-\alpha) Z) \leq \alpha\mu(Y) + (1-\alpha)\mu(Z).$$

Рассмотрим фиксированные риски $X_1 = Y$, $X_2 = Z$, портфели $y = (1,0)$ и $z = (0,1)$. Ясно, что $R(y) = Y$, $R(z) = Z$, так что выпуклость f_μ влечет

$$\begin{aligned} \mu(\alpha Y + (1-\alpha) Z) = \mu(\alpha R(y) + (1-\alpha) R(z)) = \mu(R(\alpha y + (1-\alpha) z)) \\ = f_\mu(\alpha y + (1-\alpha) z) \leq \alpha f_\mu(y) + (1-\alpha) f_\mu(z) = \alpha\mu(R(y)) + (1-\alpha)\mu(R(z)) \\ = \alpha\mu(Y) + (1-\alpha)\mu(Z), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

2.4. Примеры мер риска

Далее вводятся меры риска, изучаемые в настоящей работе.

2.4.1. Математическое ожидание

Простейшей мерой риска $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ является его математическое ожидание

$$\varepsilon(X) = \mathbf{E}X,\ X \in \widetilde{\mathcal{X}}. \tag{2.9}$$

Эту меру можно рассматривать также, как функционал на пространстве функций распределения $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$\varepsilon(F) = \int_{-\infty}^{0} (-F(x))\,dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))\,dx,\ F \in \tilde{\mathcal{F}}, \tag{2.10}$$

или на пространстве дополнительных функций распределения $\tilde{\mathcal{S}}$:

$$\varepsilon(S) = \int_{-\infty}^{0} (S(x) - 1)\,dx + \int_{0}^{\infty} S(x)\,dx,\ S \in \tilde{\mathcal{S}}, \tag{2.11}$$

Мера риска ε принимает на типовых рисках следующие значения:

$$\varepsilon(V_a) = a,\ \ \varepsilon(B_p) = p. \tag{2.12}$$

2.4.2. Дисперсия

Другим простейшим примером меры риска может служить дисперсия распределения случайной величины:

$$\delta(X) = \mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2,\ X \in \widetilde{\mathcal{X}}_2. \tag{2.13}$$

На множестве функций распределения этот функционал задается в виде

$$\delta(F) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}_F)^2\,dF(x),\ F \in \tilde{\mathcal{F}}_2. \tag{2.14}$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{X}}_2, \tilde{\mathcal{F}}_2$ – множества случайных величин и функций распределения с конечным вторым моментом.

Мера риска δ принимает на типовых рисках следующие значения:

$$\delta(V_a) = 0,\ \ \delta(B_p) = p(1-p). \tag{2.15}$$

2.4.3. Ожидаемая полезность

Пусть $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – вещественная функция. Функционал ожидаемой полезности выглядит следующим образом:

$$\rho(X) = \mathbf{E}U(X),\ X \in \mathcal{X}. \tag{2.16}$$

На пространстве функций распределения он задается выражением

$$\rho(F) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dF(x),\ F \in \mathcal{F}. \tag{2.17}$$

Использование функционала ожидаемой полезности в теории риска восходит к монографии [3], где была построена аксиоматическая теория полезности.

Мера риска ρ принимает на типовых рисках следующие значения:

$$\rho(V_a) = U(a), \quad \rho(B_p) = pU(1) + (1-p)U(0). \tag{2.18}$$

Отметим, что при $U(x) \equiv x$ получается $\rho(X) = \mathbf{E}X$, то есть математическое ожидание является частным случаем ожидаемой полезности.

2.4.4. Мера возмущенной вероятности

Пусть $g: [0,1] \to [0,1]$ – вещественная функция. В [2] была введена мера риска, которая имеет вид

$$\pi(X) = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt, \quad X \in \widetilde{\mathcal{X}_0}, \tag{2.19}$$

$$\pi(F) = \int_0^\infty g(1-F(t))\,dt, \quad F \in \tilde{\mathcal{F}}_0, \tag{2.20}$$

$$\pi(S) = \int_0^\infty g(S(t))\,dt, \quad S \in \tilde{\mathcal{S}}_0 \tag{2.21}$$

на множествах рисков и функций распределения, соответственно.

Отметим, что

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty S_X(t)\,dt, \tag{2.22}$$

то есть, $\pi(X) = \mathbf{E}X$ при $g(x) \equiv x$ на $[0,1]$, что означает, что математическое ожидание является частным случаем меры возмущенной вероятности.

Мера риска π принимает на типовых рисках следующие значения:

$$\pi(V_a) = a, \quad \pi(B_p) = g(p). \tag{2.23}$$

Отметим здесь следующие простые свойства меры риска π. Если $g(x) \geq x$ при всех $x \in [0,1]$, то $\mathbf{E}X \leq \pi(X) \leq \max(X)$. Если $g(x) \leq x$ при всех $x \in [0,1]$, то $\min(X) \leq \pi(X) \leq \mathbf{E}X$. Следующие свойства также непосредственно вытекают из определения:

$$\pi(X+a) = \pi(X) + a, \quad a \geq 0. \tag{2.24}$$

$$\pi(aX) = a\pi(X), \quad a \geq 0. \tag{2.25}$$

Отметим также, что частным случаем меры (2.19) является принцип абсолютного отклонения Деннеберга [4].

3. Свойства мер риска

3.1. Математическое ожидание

3.1.1. Монотонность

Ввиду

$$\mathbf{E}_F = -\int_{-\infty}^{0} F(v)\,dv + \int_{0}^{\infty} (1 - F(v))\,dv \tag{3.1}$$

имеем $X \preceq_1 Y \Longrightarrow \mathbf{E}X \le \mathbf{E}Y$, то есть эта мера риска является неубывающей относительно первого стохастического доминирования. По самому определению второго стохастического доминирования ε является неубывающей относительно этого порядка. По отношению к порядку неприятия риска $\preceq_A$ эта мера является, очевидно, нейтральной:

$$X \preceq_A Y \Longrightarrow \varepsilon(X) = \varepsilon(Y).$$

3.1.2. Выпуклость

Непосредственно из свойств математического ожидания вытекает его линейность по значению

$$\varepsilon(\alpha X + \beta Y) = \alpha\varepsilon(X) + \beta\varepsilon(Y);\ \ X, Y \in \widetilde{\mathcal{X}},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Далее, поскольку для $\alpha \in [0,1]$, $F, G \in \tilde{\mathcal{F}}$ имеем

$$\varepsilon(\alpha F + (1-\alpha)G) = \mathbf{E}_{\alpha F+(1-\alpha)G} = \int_{-\infty}^{\infty} v d[\alpha F(v) + (1-\alpha)G(v)]$$
$$= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} vdF(v) + (1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} vdG(v) = \alpha\varepsilon(F) + (1-\alpha)\varepsilon(G),$$

эта мера оказывается также линейной по распределению.

3.2. Дисперсия

3.2.1. Монотонность

Дисперсия, очевидно, не является монотонной относительно первого или второго стохастического доминирования. Контрпримером может служить набор рисков $V_0, V_1, B_{1/2}$, для которых справедливо

$$V_0 \preceq_1 B_{1/2} \preceq_2 V_1,\ \ V_0 \preceq_D B_{1/2} \preceq_D V_1,$$

и, тем не менее,

$$\delta(V_0) < \delta(B_{1/2}),\ \ \delta(V_1) < \delta(B_{1/2}).$$

Дисперсия является невозрастающей (и даже строго убывающей) мерой относительно порядка неприятия риска, поскольку для любого вырожденного риска V_a имеем $\delta(V_a) = 0$, а для любого невырожденного риска X выполняется $\delta(X) > 0$.

3.2.2. Выпуклость

Предложение 3.1. *Дисперсия $\delta(\cdot)$ является выпуклой мерой риска по значению.*

Доказательство. Пусть пара случайных величин $X, Y \in \widetilde{\mathcal{X}}_2$ имеет ковариацию

$$C_{XY} = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y).$$

С помощью элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned}\delta(\alpha X+(1-\alpha)Y)&=\mathbf{D}(\alpha X+(1-\alpha)Y)\\ =\alpha\delta(X)+(1-\alpha)\delta(Y)&-\alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}X+\mathbf{D}Y-2C_{XY}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

По неравенству Шварца

$$C_{XY}\le\sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y},$$

откуда

$$\mathbf{D}X+\mathbf{D}Y-2C_{XY}\ge(\sqrt{\mathbf{D}X}-\sqrt{\mathbf{D}Y})^2\ge 0,$$

поэтому (3.2) влечет

$$\delta(\alpha X+(1-\alpha)Y)\le\alpha\delta(X)+(1-\alpha)\delta(Y), \tag{3.3}$$

что означает выпуклость δ по значению. □

Напомним следующие элементарные факты:

$$\mathbf{D}X=\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2\le\mathbf{E}(X-a)^2,\quad a\in\mathbf{R}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{D}X=\mathbf{E}[X(X-\mathbf{E}X)]=\mathbf{E}[(X-a)(X-\mathbf{E}X)],\quad a\in\mathbf{R}. \tag{3.5}$$

и сформулируем

Предложение 3.2. *Функционал дисперсии является вогнутым по распределению.*

Доказательство. Обозначим E_F, D_F математическое ожидание и дисперсию функции распределения F, зафиксируем функции распределения $F,G\in\mathcal{F}$ и число $\lambda\in[0,1]$. Воспользовавшись определением дисперсии (3.5) с $a=0$, получаем:

$$\begin{aligned}\delta(\lambda F+(1-\lambda)G)&=D_{\lambda F+(1-\lambda)G}\\ &=\int y(y-\lambda E_F-(1-\lambda)E_G)\,d[\lambda F(y)+(1-\lambda)G(y)]\\ &=\int y^2\,d[\lambda F(y)+(1-\lambda)G(y)]\\ -\lambda E_F\int y\,d[\lambda F(y)+(1-\lambda)G(y)]&-(1-\lambda)E_G\int y\,d[\lambda F(y)+(1-\lambda)G(y)]\\ &=\lambda\mathbf{E}X_F^2+(1-\lambda)\mathbf{E}X_G^2-\lambda^2(E_F)^2-2\lambda(1-\lambda)E_FE_G-(1-\lambda)^2(E_G)^2\\ &=\lambda D_F+(1-\lambda)D_G+\lambda(1-\lambda)(E_F-E_G)^2\\ &\ge\lambda D_F+(1-\lambda)D_G=\lambda\delta(F)+(1-\lambda)\delta(G),\end{aligned}$$

что и требовалось.

3.3. Ожидаемая полезность

3.3.1. Монотонность

Предложение 3.3. *Ожидаемая полезность ρ является неубывающей (невозрастающей) относительно первого стохастического доминирования тогда и только тогда, когда функция U является неубывающей (невозрастающей).*

Доказательство. Действительно, пусть U является неубывающей функцией и для некоторых $F, G \in \mathcal{F}$ имеет место $F \preceq_1 G$. Тогда, по определению стохастического доминирования, $F(v) \geq G(v)$, $v \in \mathbf{R}$. Используя канонические случайные величины, соответствующие функциям распределения F, G, получаем

$$F^{-1}(\omega) \leq G^{-1}(\omega),\ \omega \in [0,1],$$

так что

$$\rho(F) = \mathbf{E}U(F^{-1}) \leq \mathbf{E}U(G^{-1}) = \rho(G),$$

что и требовалось.

Пусть теперь ρ является неубывающей относительно первого стохастического доминирования, то есть

$$F \preceq_1 G \Longrightarrow \rho(F) \leq \rho(G).$$

Для доказательства монотонности U зафиксируем $v < w$ и рассмотрим вырожденные риски V_v, V_w. Поскольку $V_v \preceq_1 V_w$, имеем $\rho(V_v) \leq \rho(V_w)$, что, с учетом (2.18), означает $U(v) \leq U(w)$. Доказательство для невозрастающих U, ρ аналогично. □

Предложение 3.4. *ρ является неубывающей (невозрастающей) относительно неприятия риска в том и только в том случае, когда U вогнута (выпукла).*

Доказательство. Пусть U выпукла. Тогда ([6], 3.9.3) для любого риска $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ выполняется $\mathbf{E}U(X) \geq U(\mathbf{E}X)$, то есть, $\rho(X) \geq \rho(V_{\mathbf{E}X})$, и ρ является невозрастающей относительно неприятия риска.

Пусть теперь ρ является невозрастающей относительно $\preceq_A$. Покажем выпуклость U. Для этого зафиксируем произвольные v, w из ее области определения, произвольное число $\alpha \in [0,1]$, и рассмотрим риск X со следующим дискретным распределением: $\mathbf{P}\{X = v\} = \alpha$, $\mathbf{P}\{X = w\} = 1-\alpha$. Ясно, что $\mathbf{E}X = \alpha v + (1-\alpha)w$, и по условию $\rho(X) \geq \rho(V_{\mathbf{E}X})$, что в данном случае означает $\alpha U(v) + (1-\alpha)U(w) \geq U(\alpha v + (1-\alpha)w)$, то есть, выпуклость U. Доказательство для случая вогнутой U проводится аналогично. □

3.3.2. Выпуклость

Предложение 3.5. *Ожидаемая полезность является линейной мерой риска по распределению.*

Доказательство сразу вытекает из (2.17):

$$\rho(\alpha F + (1-\alpha)G) = \int U(v)\, d[\alpha F(v) + (1-\alpha)G(v)]$$

$$= \alpha \int U(v)\, dF(v) + (1-\alpha)\int U(v)\, dG(v) = \alpha\rho(F) + (1-\alpha)\rho(G). \ \square$$

Предложение 3.6. *Ожидаемая полезность выпукла (вогнута) по значению тогда и только тогда, когда функция U выпукла (вогнута).*

Доказательство. Пусть U выпукла. Зафиксируем произвольные $X, Y \in \widetilde{\mathcal{X}}$ и произвольное число $\alpha \in [0,1]$. Имеем:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \mathbf{E}U(\alpha X + (1-\alpha)Y)\\ &\le \mathbf{E}(\alpha U(X) + (1-\alpha)U(Y)) = \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y),\end{aligned}$$

то есть ρ является выпуклой по значению.

Пусть теперь ρ выпукла по значению. Зафиксируем произвольные v, w из области определения U, произвольное число $\alpha \in [0,1]$, и рассмотрим вырожденные риски V_v, V_w. Имеем: $\rho(V_v) = U(v)$, $\rho(V_w) = U(w)$, кроме того, $\alpha V_v + (1-\alpha)V_w = V_{\alpha v + (1-\alpha)w}$, откуда $U(\alpha V_v + (1-\alpha)V_w) = U(V_{\alpha v+(1-\alpha)w})$, так что по выпуклости ρ

$$\rho(\alpha V_v + (1-\alpha)V_w) \le \alpha\rho(V_v) + (1-\alpha)\rho(V_w),$$

что означает

$$U(\alpha v + (1-\alpha)w) \le \alpha U(v) + (1-\alpha)U(w),$$

то есть, выпуклость U. Доказательство для случая вогнутости аналогично. □

3.4. Мера возмущенной вероятности

3.4.1. Монотонность

Предложение 3.7. *Мера π является неубывающей относительно первого стохастического доминирования тогда и только тогда, когда g является неубывающей на* $[0,1]$.

Доказательство. Пусть g является неубывающей. Покажем, что $X \preceq_1 Y$ влечет $\pi(X) \le \pi(Y)$. Для дополнительных функций распределения из $X \preceq_1 Y$ вытекает $S_X(t) \le S_Y(t)$, $t \ge 0$, что, ввиду монотонности g, дает

$$\pi(X) = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt \le \int_0^\infty g(S_Y(t))\,dt = \pi(Y).$$

Пусть теперь π является неубывающей: $X \preceq_1 Y \implies \pi(X) \le \pi(Y)$. Покажем, что g при этом также является неубывающей. Зафиксируем $p < q$ и рассмотрим бернуллиевские риски B_p, B_q. Ясно, что $B_p \preceq_1 B_q$, так что с необходимостью $\pi(B_p) \le \pi(B_q)$, что эквивалентно $g(p) \le g(q)$. □

Предложение 3.8. *$\pi(\cdot)$ является невозрастающей относительно неприятия риска $\preceq_A$ тогда и только тогда, когда*

$$g(x) \ge x,\ x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

$\pi(\cdot)$ является неубывающей относительно неприятия риска $\preceq_A$ тогда и только тогда, когда

$$g(x) \le x,\ x \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть выполнено (3.6). Тогда, с учетом (2.22), имеем:

$$\pi(X) = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt \geq \int_0^\infty S_X(t)\,dt = \mathbf{E}X = \pi(V_{\mathbf{E}X}),$$

то есть мера π является невозрастающей относительно $\preceq_A$.

Пусть теперь π является невозрастающей относительно $\preceq_A$: $\pi(X) \geq \pi(V_{\mathbf{E}X})$. Рассмотрим бернуллиевские риски $B_p,\ p \in [0,1]$. Имеем

$$g(p) = \pi(B_p) \geq \pi(V_{\mathbf{E}B_p}) = \pi(V_p) = p, \ \ p \in [0,1],$$

что и требовалось. Доказательство для случая неубывающей π аналогично. □

Предложение 3.9. *Функция g вогнута тогда и только тогда, когда мера риска π является неубывающей относительно второго стохастического доминирования.*

Доказательство. Пусть g вогнута. Нам достаточно показать, что $X \preceq_D Y$ влечет $\pi(X) \leq \pi(Y)$[3]. Для этого отметим простое свойство вогнутой функции: если c – некоторая точка из области ее определения, то найдется такое число $\tilde{g}(c)$[4], что

$$a < b < c \Longrightarrow g(b) - g(a) \geq \tilde{g}(c)(b-a), \tag{3.8}$$

$$c < a < b \Longrightarrow g(b) - g(a) \leq \tilde{g}(c)(b-a). \tag{3.9}$$

Пусть $X \preceq_D Y$, то есть, $\mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$ и

$$\exists c \geq 0 : \quad \begin{cases} S_X(t) \geq S_Y(t), & t < c, \\ S_X(t) \leq S_Y(t), & t \geq c. \end{cases} \tag{3.10}$$

Рассмотрим риск Z с дополнительной функцией распределения

$$S_Z(t) = \max\{S_X(t), S_Y(t)\},\ t \geq 0.$$

Тогда (3.8) с $a = S_X(t)$, $b = S_Y(t)$ влечет

$$\pi(Z) - \pi(X) = \int_c^\infty [g(S_Y(t)) - g(S_X(t))]\,dt \geq \tilde{g}(c) \int_c^\infty [S_Y(t) - S_X(t)]\,dt, \tag{3.11}$$

а из (3.8) с $a = S_Y(t)$, $b = S_X(t)$ вытекает

$$\pi(Z) - \pi(Y) = \int_0^c [g(S_X(t)) - g(S_Y(t))]\,dt \leq \tilde{g}(c) \int_0^c [S_X(t) - S_Y(t)]\,dt. \tag{3.12}$$

Вычитая (3.12) из (3.11), получаем

$$\pi(Y) - \pi(X) \geq \tilde{g}(c) \int_0^\infty [S_Y(t) - S_X(t)]\,dt = \tilde{g}(c)[\mathbf{E}Y - \mathbf{E}X] \geq 0,$$

---

[3]Данное доказательство является слегка модифицированной версией доказательства из [2]. Отметим, что верное доказательство в предположении дифференцируемости g дано также в [9]

[4]Если функция g дифференцируема в точке c, то $\tilde{g}(c) = g'(c)$. Если же g не дифференцируема в точке c, то она имеет в этой точке левую $g'_l(c)$ и правую $g'_r(c)$ производные, причем $g'_l(c) > g'_r(c)$, и в качестве $\tilde{g}(c)$ можно взять любое число из отрезка $[g'_r(c), g'_l(c)]$

что и требовалось.

Пусть теперь π не убывает относительно второго стохастического доминирования, то есть для любой пары рисков, удовлетворяющих условиям $\mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$ и (3.10), справедливо $\pi(X) \leq \pi(Y)$. Покажем, что функция g при этом обязана быть вогнутой, то есть для произвольных $a, b \in [0,1]$, $a < b$ выполняется

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{g(a)+g(b)}{2}. \tag{3.13}$$

Для доказательства зафиксируем произвольные $a < b$ из отрезка $[0,1]$ и рассмотрим риски X, Y со следующими распределениями:

$$\mathbf{P}\{X=0\} = 1-b, \ \ \mathbf{P}\{X=1/2\} = b-a, \ \ \mathbf{P}\{X=1\} = a;$$
$$\mathbf{P}\{Y=0\} = 1-\frac{a+b}{2}, \ \ \mathbf{P}\{Y=1\} = \frac{a+b}{2}.$$

Как нетрудно подсчитать, $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = (a+b)/2$, и

$$S_X(t) = b > \frac{a+b}{2} = S_Y(t), \ t < 1/2,$$

$$S_X(t) = a < \frac{a+b}{2} = S_Y(t), \ 1/2 \leq t < 1,$$
$$S_X(t) = S_Y(t) = 0, \ \ t \geq 1,$$

так что $X \preceq_D Y$. Поскольку

$$\pi(X) = \frac{g(a)+g(b)}{2}, \ \ \pi(Y) = g\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

монотонность π непосредственно влечет (3.13). $\square$

3.4.2. Выпуклость

Нам понадобится следующая теорема из [5].

Теорема 3.1. *Мера риска π является субаддитивной на $\widetilde{\mathcal{X}_0}$ тогда и только тогда, когда g вогнута.*

Предложение 3.10. *Функция g вогнута тогда и только тогда, когда мера риска π является выпуклой по значению.*

Доказательство. Пусть g вогнута. Тогда для произвольных рисков X, Y и числа $\alpha \in [0,1]$ из теоремы 3.1 и положительной однородности π (2.25) вытекает:

$$\pi(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \pi(\alpha X) + \pi((1-\alpha)Y) = \alpha\pi(X) + (1-\alpha)\pi(Y),$$

что и означает выпуклость π по значению.

Пусть теперь π выпукла по значению. Тогда для произвольных $X, Y \in \widetilde{\mathcal{X}_0}$

$$\pi\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{\pi(X)+\pi(Y)}{2},$$

что вместе с положительной однородностью π влечет $\pi(X+Y) \leq \pi(X) + \pi(Y)$, а по теореме 1 отсюда следует вогнутость g. $\square$

Предложение 3.11. *Функция g вогнута тогда и только тогда, когда мера π является вогнутой по распределению.*

Доказательство. Пусть g вогнута, $S, R \in \tilde{\mathcal{S}}_0$ – дополнительные функции распределения двух произвольных рисков, α – произвольное число из отрезка $[0,1]$, тогда

$$\pi(\alpha S + (1-\alpha)R) = \int_0^\infty g(\alpha S(t) + (1-\alpha)R(t))\,dt$$
$$\geq \alpha \int_0^\infty g(S(t))\,dt + (1-\alpha)\int_0^\infty g(R(t))\,dt = \alpha\pi(S) + (1-\alpha)\pi(R),$$

что доказывает вогнутость π по распределению.

Пусть теперь π вогнута по распределению, то есть для любых дополнительных функций распределения $S, R \in \tilde{\mathcal{S}}_0$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$\pi(\alpha S + (1-\alpha)R) \geq \alpha\pi(S) + (1-\alpha)\pi(R). \tag{3.14}$$

Обозначим S_p дополнительную функцию распределения бернуллиевского риска B_p, зафиксируем произвольные $p, q, \alpha \in [0,1]$ и рассмотрим дополнительные функции распределения S_p, S_q. Смесь дополнительных функций распределения S_p и S_q, очевидно, равна $S_{\alpha p+(1-\alpha)q}$. Из (2.23) вытекает

$$\pi(S_p) = g(p),\ \pi(S_q) = g(q),\ \pi(S_{\alpha p+(1-\alpha)q}) = g(\alpha p + (1-\alpha)q),$$

так что (3.14) влечет $g(\alpha p + (1-\alpha)q) \geq \alpha g(p) + (1-\alpha)g(q)$, что и требовалось. □

Предложение 3.12. *Функция g выпукла тогда и только тогда, когда мера π является выпуклой по распределению.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство предложения 3.11.

4. Заключение

Установленные в настоящей работе свойства ожидаемой полезности и меры возмущенной вероятности позволяют использовать данные меры риска в задачах формирования инвестиционных и страховых портфелей.

Список литературы

[1] Markowitz H. (1959) *Portfolio selection. Efficient Diversification of Investments.* New York: Wiley.

[2] Wang, S. (1996) Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.

[3] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[4] Denneberg, D. (1990) Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *ASTIN Bulletin*, **20**, 2, 181–190.

[5] Denneberg, D. (1994) *Non– Additive measure and Integral.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[6] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд-во иностр. литер.

[7] Young V.R. (1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.

[8] Bauerle, N., and Muller, A. (1998) Modeling and Comparing Dependences in Multivariate Risk Portfolios, *ASTIN Bulletin*, **28**, 1, pp. 59–76.

[9] Hurlimann, W. (1998) On Stop–Loss Order and the Distorted Pricing Principle. *ASTIN Bulletin*, **28**, 1, 119–134.

[10] Калашникова Л.В. (2000) О монотонности меры риска Вонга относительно второго стохастического доминирования. *Частное сообщение*

[11] В.Феллер (1984) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.*- М.: "Мир", **1**, 527 с.; **2**, 751 с.

[12] Buhlmann Hans (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory* // Springer, Berlin.– 1970.

[13] Ebrahimi, N., Maasoumi, E., Soofi, E. (1999) Ordering univariate distributions by entropy and variance. *Journal of econometrics*, **90**, 2, 317–336.

[14] Rockafellar, R.T. (1970) *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton.

[15] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1994) *Stochastic Orders and Their Applications.* Academic Press, London.

[16] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1997) Supermodular Stochastic Orders and Positive Dependence of Random Vectors. *Journal of Multivariate Analysis* **61**, 81–101.

[17] Shaked M., Shanthikumar J.G. (1985) Some Partial Orderings of Exchangeable Random Variables by Positive Dependence. *Journal of Multivariate Analysis* **17**, 333–349.

[18] Tchen, A.H. (1980) Inequalities for Distributions with Given Marginals. *Annals of Probability* **8**, 814–827.

[19] Tong, Y.L. (1980) *Probability Inequalities in Multivariate Distributions* Academic Press, New York.

[20] Tong, Y.L. (1989) Inequalities for a Class of Positively Dependent Random Variables with a Common Marginal. *Annals of Statistics* **17**, 429–435.