Моделирование возрастания корреляций методом смеси

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *Финансовые рынки большую часть времени находятся в спокойном состоянии, и лишь в течение относительно непродолжительного времени бывают подвержены резким колебаниям. Вследствие этого при построении моделей финансового рынка возникает парадоксальная ситуация. Для построения модели спокойного времени обычно бывает достаточно данных наблюдений, поэтому модель получается довольно точной, хотя управление риском в спокойном режиме не требует значительной точности. Наблюдений же, соответствующих кризисным состояниям, мало, и явно недостаточно для построения моделей с хорошим приближением, хотя тщательное управление риском особенно важно именно в кризисные времена. Для разрешения этого парадокса создаются различные методы построения моделей, позволяющих максимально учитывать все имеющиеся данные. Один из таких методов построения кризисной модели и представлен в настоящей работе.*

Ключевые слова. *Риск, модель, корреляция, нормальное распределение, стресс-тестирование.*

1 Введение

На финансовых рынках давно обнаружено следующее явление: при возрастании изменчивости (волатильности) показателей доходности рыночных инструментов или факторов возрастают также корреляции между эти инструментами и факторами [2, 4]. Возрастание корреляций означает уменьшение возможностей диверсификации в портфелях, составленных из таких инструментов. Таким образом, возрастание риска при этом происходит двояким образом, как за счет возрастания изменчивости доходности инструментов, так и за счет возрастания корреляций.

Для отражения этого явления в факторных моделях [1] финансовых рынков используются методы и приемы нескольких классов. Одни методы используют вместо нормального распределения факторов другие распределения с так называемыми тяжелыми хвостами. В таких методах хорошим выбором является распределение Стьюдента (t-распределение), которое снабжает тажелыми хвостами как маргинальные распределения (моделирование возрастания волатильности), так и взаимодействие между переменными (моделирование возрастания корреляций).

Другие методы сохраняют в модели нормальное распределение, подстраивая к изменившимся условиям параметры модели. К таким методам относится классический метод экспоненциального взвешивания, который при вычислении параметров модели приписывает большие веса недавним наблюдениям, что позволяет в определенной степени уловить динамику процесса.

К этому последнему классу относится и предлагаемая модель смеси. Эта модель имеет форму нормального распределения факторов, в которой при оценивании маргинальных распределений используется экспоненциальное взвешивание, а при оценивании копулы используется процедура смеси различных корреляционных матриц, позволяющая оценить степень возрастания корреляций.

2 Факторная модель финансового рынка

В стандартной факторной модели финансового рынка основным элементом является случайный вектор факторов X размерности n, который имеет нормальное распределение с нулевым средним и ковариционной матрицей C. Рыночные инструменты A представлены в модели в виде функций от факторов $A = f(X)$, как правило, линейных. В настоящей работе основное внимание уделяется оцениванию ковариационной матрицы C.

Рыночным стандартом оценивания ковариационной матрицы C является метод экспоненциального взве-

© 2012 А.А. Новоселов
Олег Воробьев (ред.), Труды ЭМ'2012, Красноярск: СФУ

шивания. Пусть

$$X^1, \dots, X^N -$$

наблюдения вектора факторов, расположенные в порядке от прошлого к настоящему. Зафиксируем показатель взвешивания $\lambda \in (0, 1)$, тогда оценка элементов ковариационной матрицы запишется в виде

$$c_{ij} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^N} \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} X_i^k X_j^k \tag{1}$$

для $i, j = 1, \dots, n$. При $\lambda \to 1$ получается обычное невзвешенное среднее.

Такой метод оценивания позволяет улавливать свежие рыночные тенденции, однако, далеко не всегда именно последние наблюдения характеризуют экстремальные условия, в том числе, возросшие корреляции. Часто такие экстремальные периоды разбросаны во времени. Отсюда вытекает метод взвешенного оценивания ковариаций, аналогичный (1). Один такой метод (event weighting) был предложен в [3]. В настоящей работе предлагается другой метод оценивания основанный на поведении условных корреляций нормального распределения.

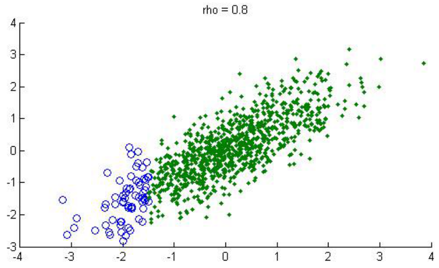

Рис. 1: Отбор наблюдений для вычисления условной ковариации при $\rho = 0.8$, $t = -1.5$

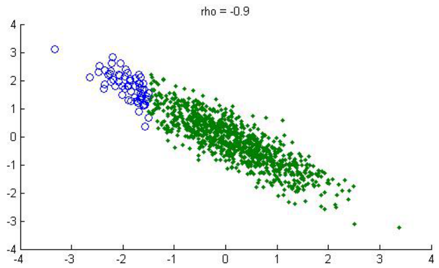

Рис. 2: Отбор наблюдений для вычисления условной ковариации при $\rho = -0.9$, $t = -1.5$

3 Условные корреляции нормального распределения

Пусть сначала $X = (X_1, X_2)'$ - двумерный нормальный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Исследуем поведение условной ковариации

$$\begin{aligned} f_\rho(t) &= Cov((X_1, X_2)|X_1 \le t) \\ &= \mathbf{E}(X_1 X_2 | X_1 \le t) \\ &- \mathbf{E}(X_1|X_1 \le t)\mathbf{E}(X_2|X_1 \le t) \end{aligned} \tag{3}$$

как функции от условия - границы t. На рис. 1 изображены наблюдения из нормальной модели с положительным коэффициентом корреляции, а на рис. 2 — то же для случая отрицательной корреляции.

Непосредственное вычисление условных величин по формуле (3) не представляется возможным, поэтому используем метод Монте Карло с количеством испытаний 10^6.

На рис. 3 приведены графики зависимости ковариации от границы t, задающей условие, при некоторых значениях истинной корреляции ρ. На рис. 4 аналогичные зависимости показаны для условной корреляции. Видно, что условная корреляция уменьшается по абсолютной величине при уменьшении границ t. Аналогичное поведение условных корреляций наблюдается и в случае нормальных распределений большой размерности.

Отсюда возникает гипотеза о наличии функциональной зависимости между величиной корреляции ρ и уровнем t, с одной стороны, и изменением корреляции $f_\rho(t) - \rho$, с другой стороны. Однако, эта гипотеза отвергается простейшими экспериментами, проведенными при размерностях 3 и выше. Зависимость условных корреляций от безусловных в многомерном случае оказывается сложнее, и не описывается поведением условных корреляций в отдельных парах переменных. По-видимому, исчерпывающе зависимость условной корреляции от t в n-мерном случае можно описать только в виде функции от всех $n(n-1)/2$ корреляций, причем функция оказывается существенно нелинейной. Идентификация такой зависимости при типичной размерности пространства факторов n в несколько сотен представляется неразрешимой.

4 Модель смеси корреляционных матриц

Вместо поиска "истинной" модели займемся приближенным вычислением корреляционной матрицы, которая отражала бы наблюдаемое увеличение корреляций в экстремальной области. Некоторую трудность представлет то обстоятельство, что условная

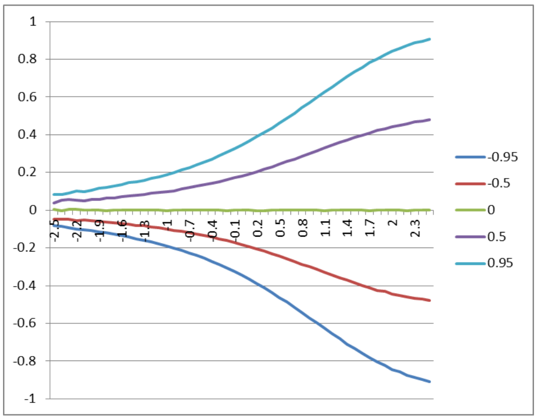

Рис. 3: Зависимость условной ковариации $f_\rho(t)$ от условия t при различных значениях истинной корреляции ρ

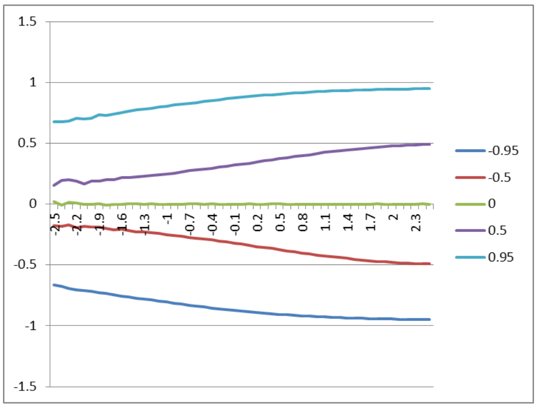

Рис. 4: Зависимость условной корреляции от условия t при различных значениях истинной корреляции ρ

корреляция, как мы отмечали в предыдущем параграфе, оказывается меньшей (по абсолютной величине), чем безусловная корреляция. Поэтому предлагается следующая схема оценивания ковариационной матрицы по данным наблюдений

$$X_{ji}, \;\; j = 1, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, m,$$

где n — число факторов, m — объем выборки наблюдений:

- вычислить "спокойную" ковариационную матрицу, например, по формуле (1), перевести ее в форму корреляционной матрицы C^0;
- выбрать "управляющую" переменную X_1;
- зафиксировать уровень условия t, отобрать в множество $I(t)$ номера i точек выборки, удовлетворяющих условию $X_{1i} \leq t$;
- подсчитать количество точек, удовлетворяющих условию: $m_t = |I(t)|$;
- оценить условные средние

$$\mu_j(t) = \frac{1}{m_t} \sum_{i \in I(t)} X_{ji}, \;\; j = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

  и элементы $\tilde{c}_{jk}(t)$ условной ковариационой матрицы $\tilde{C}$

$$\tilde{c}_{jk}(t) = \frac{1}{m_t} \sum_{i \in I(t)} (X_{ji} - \mu_j)(X_{ki} - \mu_k),$$

$$j, k = 1, \ldots, n;$$

- пересчитать условную ковариационную матрицу $\tilde{C}(t)$ в соответствующую корреляционную матрицу $C(t)$;
- выбрать некоторую "идеальную" корреляционную матрицу C^I, в которой корреляции достигают своего максимально возможного (по абсолютной величине) значения;
- методом Монте-Карло вычислить условные корреляции $\hat{C}(t)$, соответствующие нормальному распределению с матрицей C^0;
- в каждой паре факторов $j < k$ определить смещение корреляции в сторону идеального случая

$$\lambda_{jk} = \frac{\tilde{c}_{jk} - \hat{c}_{jk}(t)}{c^I_{jk} - \hat{c}_{jk}(t)}, \;\; 1 \leq j < k \leq n;$$

- вычислить среднее смещение "в сторону" идеальной корреляционной матрицы

$$\lambda = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j<k} \lambda_{jk};$$

- вычислить оценку корреляционной матрицы в виде

$$C = \lambda C^I + (1 - \lambda) C^0; \qquad (5)$$

- перевести матрицу C в ковариационную матрицу, масштабируя переменные стандартными отклонениями из матрицы "спокойного" периода.

К этой общей схеме необходимы некоторые пояснения. Во-первых, где взять "идеальную" корреляционную матрицу.

В качестве первого примера можно рассмотреть матрицу, состоящую их единиц, которая соответствует случайному вектору с идеальными положительно коррелированными компонентами.

В случае наличия двух групп компонент, у которых идеальные корреляции внутри групп равны 1, а между группами - равны -1, соответствующая идеальная корреляционная матрица имеет вид $C^I = KK'$, где столбец K устроен так, что $K_j = 1$ для компонент первой группы и $K_j = -1$ для компонент второй группы. Например, если в списке факторов сначала указать два фактора первой группы, а затем три фактора второй группы, то вектор K будет иметь вид $K = (1, 1, -1, -1, -1)'$, а идеальная корреляционная матрица примет значение

$$C^I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эксперт финансового рынка может назначить в качестве идеальных корреляций и значения, по модулю меньшие единицы. В каждом случае следует стремиться к возможно более точному отражению в модели доступной информации о рынке.

Еще один вопрос относится к смыслу матрицы смеси C: является ли она в действительности корреляционной матрицей какого-либо распределения? Симметрия этой матрицы очевидна, а положительная определенность обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1 *Пусть матрица A является положительно определенной, а матрица B — неотрицательно определенной. Тогда при любом $\lambda \in [0, 1)$ матрица $C = (1-\lambda)A + \lambda B$ является положительно определенной.*

Доказательство. В силу положительной определенности A имеем $x'Ax \geq \alpha > 0$ при любом x с единичной евклидовой нормой, а в силу неотрицательной определенности B справедливо $x'Bx \geq 0$ для произвольных x. Поэтому, при любом фиксированном $\lambda \in [0, 1)$ для любого x с единичной евклидовой нормой имеем

$$x'Cx = x'((1-\lambda)A + \lambda B)x \geq (1-\lambda)\alpha > 0,$$

что и означает положительную определенность матрицы C. $\Box$

5 Заключение

В работе предложен метод вычисления повышенных значений корреляций между факторами, возникающих в периоды сильной изменчивости показателей финансового рынка, по данным наблюдений с относительно небольшой долей экстремальных наблюдений. Метод заключается в смешивании корреляционной матрицы, соответствующей нормальному функционированию рынка, с некоторой идеальной корреляционной матрицей. Веса смеси вычисляются на основе сравнительного анализа условных корреляций в нормальной модели и в модели, полученной по экстремальным рыночным данным.

Метод показал свою работоспособность в моделях стресс-тестирования, когда в условиях нормального функционирования рынка необходимо сделать выводы о поведении имеющегося портфеля при резком изменении параметров рынка.

Список литературы

[1] J. Bai and S. Ng. Determining the number of factors in approximate factor models. *Econometrica*, 70:191–221, 2002.

[2] H. Levy and M. Sarnat. International diversification of investment portfolios. *The American Economic Review*, 60:668–675, 1970.

[3] A. Novosyolov and D. Satchkov. Portfolio crash testing: Making sense of extreme event exposures. *Journal of Risk Model Validation*, 4:53–67, 2010.

[4] L.S. Speidell and R. Sappenfield. Global diversification in a shrinking world. *The Journal of Portfolio Management*, 19:57–67, 1992.

Arcady Arsenievich Novosyolov (Krasnoyarsk, Russia)

Modeling of Rising Correlations Using Mixtures

Abstract. *Financial markets used to be in a state of normal functioning most of the time, and only seldom they are exposed to huge jumps. This leads to a paradox: we have enough data to estimate calm times model, which needs not to be very much precise. On the other hand, there are only a few observations of crisis behavior, which are crucial for building crisis time model. The paradox is resolved by different methods allowing to involve most of the data into crisis time model estimation. One such method is presented in the present paper.*

Keywords. *Risk, model, correlation, normal distribution, stress-testing.*