Функционал неприятия риска

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Сибирский федеральный университет
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе рассматривается функционал неприятия риска, обобщающий ранее введенный числовой способ измерения неприятия риска. Исследованы свойства введенного функционала, рассмотрены примеры для когерентных мер риска.*

Ключевые слова. *Риск, предпочтение, неприятие риска, представление, изотропное предпочтение*

1 Введение

Понятие неприятия риска было введено в работах [1, 2] в рамках линейной модели принятия решений в условиях риска, основанной на использовании функционала ожидаемой полезности [3, 4].

В работе [5] был предложен один способ измерения неприятия риска в нелинейных моделях специального вида, который получил дальнейшее развитие на широкий класс нелинейных моделей (так называемых *естественных предпочтений*) в недавних работах [6, 7].

В подходе, принятом в работах [6, 7], неприятие риска для каждого отношения предпочтения характеризуется единственным числом, что может приводить к потере информации. В настоящей работе описывается метод расширенного описания неприятия риска, в котором каждому отношению предпочтения соответствует функционал, заданный на некотором подмножестве пространства рисков. Такой метод позволяет сохранить больше информации об индивидуальном отношении к риску, содержащейся в исходном отношении предпочтения.

2 Предварительные сведения и обозначения

Напомним необходимые понятия из [7]. Обозначим $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ вероятностное пространство, а $\mathcal{X}$ — совокупность случайных величин на этом вероятностном пространстве, обладающих конечным моментом порядка p при некотором $1 \le p \le \infty$ (случай $p = \infty$ соответствует пространству случайных величин, конечных с вероятностью 1). Элементы $\mathcal{X}$ будем называть рисками. Множество $\mathcal{X}$ образует линейное пространство относительно естественных операций сложения функций и умножения функции на число. Будем считать, что $\mathcal{X}$ снабжено нормой $\|\cdot\|$, превращающей его в полное нормированное пространство. В качестве нормы можно использовать норму L_p

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, d\mathbf{P}(\omega) \right)^{1/p}$$

с параметром p, введенным выше, или любую другую норму, соответствующую смыслу задачи.

Отметим, что каждый риск X обладает конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}X$. Для "детерминированной" случайной величины введем специальное обозначение I

$$I(\omega) = 1, \ \omega \in \Omega.$$

Обозначим H_c^+, H_c^- полупространства вида

$$H_c^+ = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{E}X \ge c\}, \ \ H_c^- = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{E}X \le c\}.$$

Далее, обозначим $\mathcal{X}_0$ подпространство случайных величин с нулевым средним

$$\mathcal{X}_0 = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{E}X = 0\} = H_0^+ \cap H_0^-,$$

B — единичную сферу пространства $\mathcal{X}$

$$B = \{X \in \mathcal{X} : \|X\| = 1\},$$

а B_0 — пересечение этих подпространства и сферы

$$B_0 = \mathcal{X}_0 \cap B.$$

Полное транзитивное бинарное отношение $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется отношением предпочтения. Его асимметричную (строгое предпочтение) и симметричную (эквивалентность) части будем обозначать $\prec$ и $\sim$, соответственно. Верхним классом риска $X \in \mathcal{X}$ будем называть множество рисков, не худших, чем X:

$$U(X) = \{Y : X \preceq Y\}.$$

Верхний класс нуля

$$A = A_{\preceq} = U(0) = \{X : 0 \preceq X\}$$

называется, в терминологии из [8], множеством приемлемых рисков. Отношение предпочтения называется *инвариантным* (относительно сдвигов), если выполнено соотношение

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow X + aI \preceq Y + aI,\ a \in \mathbf{R}.$$

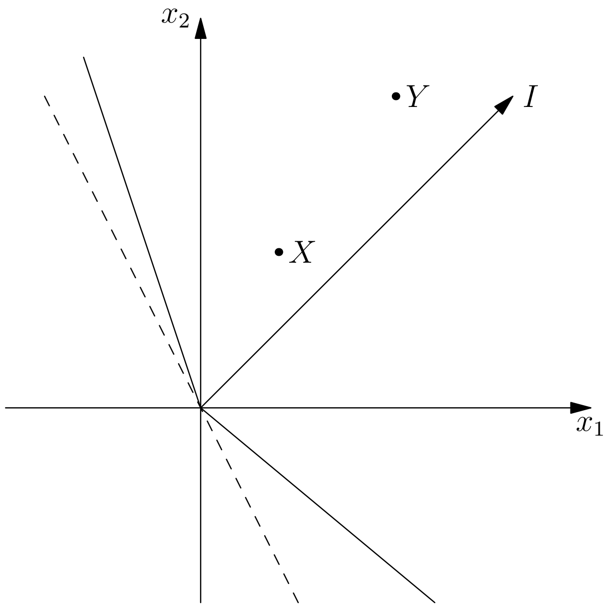

Рис. 1: Пространство рисков при $|\Omega| = 2$; детерминированный риск I; порядок $X \leq Y$; неотрицательный ортант C_+; подпространство $\mathcal{X}_0$ (штриховая линия); верхнее множество нуля (конус со сплошной границей, содержащий в себе C_+)

Функционал $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется представляющим для отношения предпочтения $\preceq$, если для произвольных $X, Y \in \mathcal{X}$ выполняется

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow f(X) \leq f(Y). \tag{1}$$

Представляющий функционал f называется *детерминированным эквивалентом*, если $f(cI) = c$ для произвольного $c \in \mathbf{R}$. Детерминированный эквивалент инвариантного предпочтения, очевидно, обладает свойством

$$f(X + cI) = f(X) + c,\ c \in \mathbf{R},\ X \in \mathcal{X}.$$

В [7] отношения предпочтения, обладающие свойствами конечности, строгой монотонности, непрерывности и ненасыщенности, названы *естественными.* Из перечисленных свойств лишь свойство монотонности является содержательным, остальные играют чисто техническую роль. По теореме 2 из [7] естественное предпочтение $\preceq$ можно представить детерминированным эквивалентом.

Всюду далее в настоящей работе будем рассматривать только естественные предпочтения.

В качестве примера в данной работе будем использовать когерентные меры риска [8], точнее, их модификация, описанная в [9], а также порожденные ими по правилу (1) отношения предпочтения. Норма в $\mathcal{X}$ при этом является нормой L_∞, и может быть записана в виде

$$\|X\| = \operatorname{vrai}\sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|. \tag{2}$$

Отметим, что всякая когерентная мера риска является детерминированным эквивалентом, и представима [9] в виде

$$f(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbf{E}_Q X, \tag{3}$$

где $\mathcal{Q}$ — некоторое выпуклое семейство вероятностных мер.

3 Неприятие риска

Как и в [7], будем говорить, что отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{X}$ обладает свойством неприятия риска, если для произвольного детерминированного риска cI и произвольного риска с нулевым средним $\Delta \in \mathcal{X}_0$ справедливо

$$cI + \Delta \prec cI. \tag{4}$$

Если же (4) выполняется лишь в нестрогом смысле: $cI + \Delta \preceq cI$, то неприятие риска будем называть *слабым.*

Сформулируем теорему о верхнем классе для отношения предпочтения с неприятием риска.

Теорема 1 *Если отношение предпочтения $\preceq$ обладает свойством слабого неприятия риска, то*

$$U(cI) \subseteq H_c^+,\ c \in \mathbf{R}.$$

Доказательство Действительно, зафиксируем вещественное c и предположим, что $X \notin H_c^+$, то есть, $\mathbf{E}X < c$. Тогда $\delta = c - \mathbf{E}X > 0$, так что $X < X + \delta I$ и

$$X \prec X + \delta I \tag{5}$$

ввиду строгой монотонности естественного предпочтения $\preceq$. Кроме того, $\Delta = X + \delta I - cI$ обладает свойством $\mathbf{E}\Delta = \mathbf{E}X + (\delta - c) = 0$, поэтому свойство неприятия риска влечет $X + \delta I = cI + \Delta \preceq cI$, что вместе с (5) дает $X \prec cI$, так что $X \notin U(cI)$, что и требовалось. $\diamond$

Пример 1 Рассмотрим на $\mathcal{X}$ отношение предпочтения, заданное следующим образом:

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow \mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$$

Это отношение является естественным, его верхние и нижние классы представляют собой полупространства

$$U(X) = \{Y : \mathbf{E}Y \geq \mathbf{E}X\} = H^{+}_{\mathbf{E}X}. \quad (6)$$

$$L(X) = \{Y : \mathbf{E}Y \leq \mathbf{E}X\} = H^{-}_{\mathbf{E}X}. \quad (7)$$

Кроме того, оно обладает свойством слабого неприятия риска.

4 Функционал неприятия риска

4.1 Общие свойства

Пусть на $\mathcal{X}$ задано естественное отношение предпочтения $\preceq$. В работе [7] для измерения неприятия риска использовалась функция

$$R(x) = \sup_{\Delta \in B_0} (f(xI) - f(xI + \Delta)),\ x \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

В настоящей работе предлагается использовать более подробную характеристику неприятия риска, именно, функционал на $\mathbf{R} \times B_0$

$$s(x, \Delta) = f(xI) - f(xI + \Delta),\ x \in \mathbf{R},\ \Delta \in B_0. \quad (9)$$

Связь между этими характеристиками имеет вид

$$R(x) = \sup_{\Delta \in B_0} s(x, \Delta),\ x \in \mathbf{R}.$$

Кроме верхней грани значений приращения f вдоль направлений Δ представляет интерес также нижняя грань

$$r(x) = \inf_{\Delta \in B_0} s(x, \Delta),\ x \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

да и все промежуточные значения s могут играть определенную роль в приложениях.

В следующей теореме выводится нижняя граница значений функционала неприятия риска.

Теорема 2 *Пусть s — функционал неприятия риска естественного предпочтения $\preceq$ с детерминированным эквивалентом f. Тогда*

$$s(x, \Delta) \geq 0,\ x \in \mathbf{R},\ \Delta \in B_0.$$

Доказательство Для $\Delta \in B_0$ и $x \in \mathbf{R}$ имеем $xI + \Delta \preceq xI$, так что $f(xI + \Delta) \leq f(xI)$, что вместе с (9) приводит к требуемому результату. $\diamond$

В теореме 3 из [7] выведено представление R в терминах верхнего класса предпочтения $\preceq$. Приведем здесь аналогичное представление для функционала неприятия риска s.

Теорема 3 *Функционал неприятия риска s можно представить в виде*

$$s(x, \Delta) = \inf\{y :\ xI + \Delta \in U((x - y)I)\}. \quad (11)$$

Доказательство При фиксированных x, Δ обозначим z правую часть (11) и зафиксируем произвольные y_1, y_2 такие, что

$$y_1 < z < y_2. \quad (12)$$

При этом

$$xI + \Delta \notin U((x - y_1)I),$$

так что $xI + \Delta \prec (x - y_1)I$, поэтому

$$f(xI + \Delta) < f(xI) - y_1,$$

то есть,

$$y_1 < f(xI + \Delta) - f(xI). \quad (13)$$

С другой стороны, при некотором w верно $z < w < y_2$, а это влечет

$$xI + \Delta \in U((x - w)I),$$

откуда $(x - w)I \preceq xI + \Delta$, что означает

$$f(xI) - w \leq f(xI + \Delta),$$

так что $f(xI) - f(xI + \Delta) \leq w$ и, тем самым,

$$f(xI) - f(xI + \Delta) < y_2. \quad (14)$$

Неравенства (13), (14) вместе в произвольностью выбора y_1, y_2 в (12) означают равенство $s(x, \Delta)$ и z, что и требовалось. $\diamond$

В [7] показано, что функционал неприятия риска, вообще говоря, неограничен сверху. Далее мы сформулируем условия, при которых удается вычислить верхнюю границу неприятия риска.

У *инвариантных* предпочтений характеристика неприятия риска s,

$$s(x, \Delta) = s(\Delta) = f(0) - f(\Delta) = -f(\Delta), \quad (15)$$

а также ее верхняя и нижняя грани

$$R(x) = R,\ \ r(x) = r$$

не зависят от $x \in \mathbf{R}$. Отметим, что когерентные меры риска порождают на $\mathcal{X}$ инвариантное отношение предпочтения.

Рассмотрим специальный класс инвариантных отношений предпочтения у которых значение s не зависит также и от Δ:

$$s(\Delta) = s = R = r,\ \Delta \in B_0.$$

Такие отношения предпочтения, равно как и представляющие их детерминированные эквиваленты, естественно назвать *изотропными*, для них неприятие риска не зависит от направления возмущения детерминированного риска.

4.2 Нижняя грань неприятия риска

По теореме 2 неприятие риска неотрицательно. В случае, если σ-алгебра $\mathcal{A}$ достаточно богата, нижняя грань неприятия риска при любом предпочтении оказывается равной нулю. Именно, справедлива

Теорема 4 *Пусть вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *таково, что в* $\mathcal{A}$ *имеются события сколь угодно малой положительной вероятности, то есть, при любом* $\delta > 0$ *найдутся* $\varepsilon > 0$ *и* Ω_ε *такие, что* $\varepsilon < \delta$ *и* $\mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) = \varepsilon$. *Тогда* $r(x) = 0$ *при любом* $x \in \mathbf{R}$.

Доказательство Зафиксируем произвольное δ, выберем по нему ε и Ω_ε, о которых шла речь формулировке теоремы. Зададим функцию Δ_ε посредством

$$\Delta_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega_\varepsilon, \\ -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, & \omega \in \Omega_\varepsilon^c. \end{cases}$$

График этой функции для случая $\Omega = [0, 1]$ изображен на рис. 2.

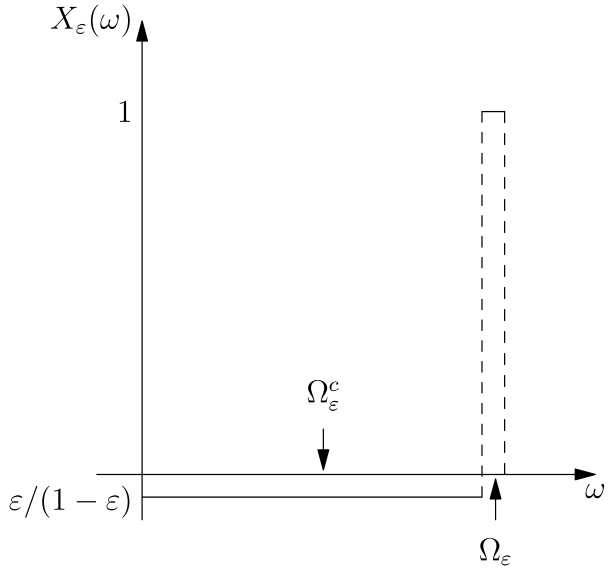

Рис. 2: Возмущение Δ_ε

Ясно, что $\mathbf{E}\Delta_\varepsilon = 0$ и $\|\Delta_\varepsilon\| = 1$, то есть, $\Delta_\varepsilon \in B_0$. Далее, очевидно,

$$\left(x - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) I \le xI + \Delta_\varepsilon,$$

откуда, ввиду монотонности предпочтения,

$$\left(x - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) I \preceq xI + \Delta_\varepsilon,$$

то есть,

$$xI + \Delta_\varepsilon \in U\left(\left(x - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) I\right).$$

С учетом (11) имеем

$$s(x, \Delta_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Ввиду произвольности δ величина $\varepsilon/(1-\varepsilon)$ может быть сколь угодно малой, поэтому

$$r(x) \le \inf_{\varepsilon>0} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 0,$$

что и требовалось. $\diamond$

4.3 Когерентные меры риска

Рассмотрим свойства неприятия риска для предпочтений, задаваемых когерентными мерами риска.

Пусть сначала f задана соотношением (3) с одноэлементным семейством $\mathcal{Q} = \{Q\}$. В этом случае

$$f(X) = \mathbf{E}_Q X, \ X \in \mathcal{X},$$

поэтому из теоремы 1 заключаем, что соответствующее предпочтение обладает неприятием риска только в случае $Q = \mathbf{P}$, причем, неприятие это — слабое.

Функционал неприятия риска в этом случае тождественно равен 0, то есть, достигает своей нижней границы, которая, тем самым, является точной нижней границей.

В случае когерентных мер риска, используемых в пространстве рисков с нормой (2), оказывается возможным и вычисление верхней границы неприятия риска. Именно, справедлива

Теорема 5 *Для когерентной меры риска (3) имеет место верхняя граница значений функционала неприятия риска*

$$s(\Delta) \le 1, \ \Delta \in B_0.$$

Доказательство Для $\Delta \in B_0$ выполняется

$$\operatorname{vrai} \inf_{\omega\in\Omega} \Delta(\omega) \ge -1,$$

так что

$$\operatorname{vrai} \inf_{\omega\in\Omega} (\Delta(\omega) + I(\omega)) \ge 0,$$

откуда $\mathbf{E}_Q(\Delta + I) \ge 0$ при произвольной вероятностной мере Q, так что (3) влечет $f(\Delta + I) \ge 0$. В силу инвариантности f имеем $f(\Delta) \ge -1$, откуда $s(\Delta) = -f(\Delta) \le 1$, что и требовалось. $\diamond$

Отметим, что верхняя граница теоремы 5 достижима. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть когерентную меру риска, задаваемую равенством (3) и семейством $\mathcal{Q}$ *всех* вероятностных мер на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Верхний класс нуля для такой меры риска совпадает с конусом неотрицательных рисков C_+. Соответствующее отношение предпочтения описывает максимально консервативного индивидуума с крайней степенью неприятия риска.

5 Примеры

Рассмотрим примеры вычисления неприятия риска в рамках модели когерентных мер риска. В случае конечного Ω имеем $|\Omega| = n$, при этом $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$ и

$$\|X\| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |X_i|.$$

Вероятностные меры являются элементами двойственного пространства, также изоморфного $\mathbf{R}^n$.

Пример 2 Пусть сначала $n = 2$,

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

тогда B_0 состоит из двух точек

$$B_0 = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}.$$

Пусть семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$, порождающее когерентную меру риска, состоит из следующих двух элементов:

$$\mathcal{Q} = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)\right\}.$$

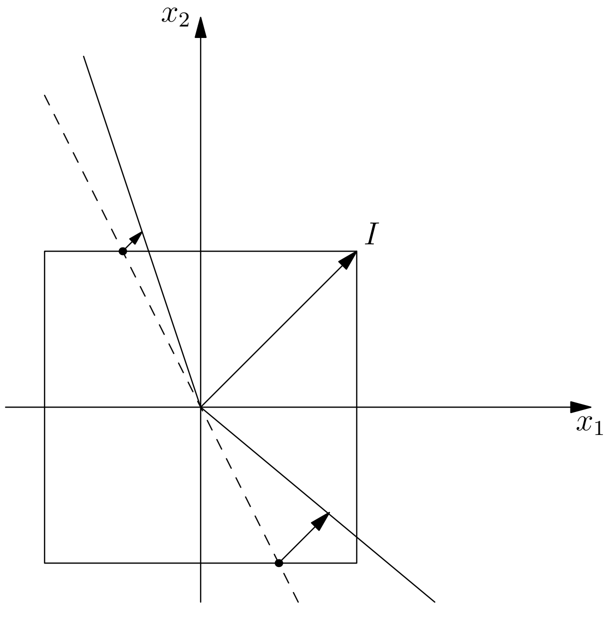

Рис. 3: Функционал неприятия риска в примере 1

При этом значение когерентной меры риска на риске $X = (x_1, x_2)$ равно

$$f(X) = \min\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2, \frac{5}{11}x_1 + \frac{6}{11}x_2\right). \qquad (16)$$

В частности,

$$f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \min\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$$

и

$$f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \min\left(\frac{1}{8}, -\frac{7}{22}\right) = -\frac{7}{22},$$

так что $s(\cdot)$ принимает на B_0 два различных значения, в частности,

$$R(x) = \frac{7}{22}, \quad r(x) = \frac{1}{8}.$$

Пример 3 В условиях примера 2 заменим семейство вероятностных мер $\mathcal{Q}$, порождающее когерентную меру риска, на

$$\mathcal{Q} = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)\right\}.$$

Тогда значение когерентной меры риска на риске $X = (x_1, x_2)$ равно

$$f(X) = \min\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2, \frac{7}{12}x_1 + \frac{5}{12}x_2\right). \qquad (17)$$

В частности,

$$f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \min\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$$

и

$$f\left(1, -\frac{1}{2}\right) = \min\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8},$$

так что $s(\Delta) = 1/8$ при всех $\Delta \in B_0$, что и означает изотропность меры риска (17).

Пример 4 Рассмотрим еще пример с $n = 3$ и основной вероятностной мерой

$$P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Здесь B_0 является пересечением плоскости

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 0$$

и поверхности куба $[-1, 1]^3$, и представляет собой границу правильного шестиугольника, вершины которого имеют вид

$$\begin{array}{lll} (1,0,-1), & (1,-1,0), & (0,-1,1), \\ (-1,0,1), & (-1,1,0), & (0,1,-1). \end{array}$$

Множество B_0 изображено на рис. 4.

Зададим когерентную меру риска f посредством семейства вероятностных мер

$$\mathcal{Q} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

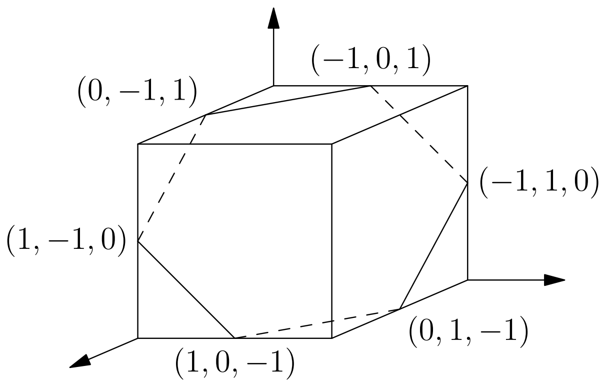

Рис. 4: Множество B_0 при $n = 3$

и равенства (3). В вершинах шестиугольника B_0 мера риска f принимает значение -0.25, а на сторонах B_0 ведет себя следующим образом. На сторонах, показанных на рис. 4 штриховой линией, f принимает постоянное значение -0.25. На сторонах, показанных сплошной линией, f является кусочно-линейной функцией, достигающей максимума -0.125 в середине стороны. Так, например, на стороне, соединяющей точки $X = (-1, 0, 1)$ и $Y = (0, -1, 1)$, лежащей на верхней грани куба, выполняется равенство

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = -\frac{1}{4}\max\{\lambda, (1-\lambda)\},\ \lambda \in [0, 1].$$

Из (15) и (9), (10) ясно, что функционал неприятия риска s принимает на B_0 значения от 0.125 до 0.25, так что

$$R = 0.25,\ r = 0.125.$$

Список литературы

[1] J.D. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122–136, 1964.

[2] K.J. Arrow. *Essays in the risk-bearing.* Markham, Chicago, 1971.

[3] J.H. Dreze. *Essays on economic decisions under uncertainty.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[4] Дж. фон Нейман and О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение.* Наука, М., 1970.

[5] А.А. Новоселов. Неприятие риска: качественный подход и количественные оценки. *Автоматика и телемеханика*, 7:165–177, 2003.

[6] A.A. Novosyolov. Measuring risk aversion in non-linear preference models. *Proceedings of the 11th Scientific School Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems*, 1:165–170, 2011.

[7] А.А. Новоселов. Измерение неприятия риска. *Труды X Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, СФУ, 2011*, 1:309–313, 2011.

[8] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.

[9] А.А. Новоселов. Обобщенные когерентные меры риска. *Труды IV Международной конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам, КГУ, 2005*, 1:325–339, 2005.

Arcady Arsenievich Novosyolov (Krasnoyarsk, Russia)

Risk Aversion Functional

Abstract. *The paper is devoted to a risk aversion functional, which generalizes numeric risk aversion measure defined before. We study some properties of the functional and consider examples for the case of coherent risk measures.*

Keywords. *Risk, preference, risk aversion, representation, isotropic preference.*