Канонические представляющие функционалы для некоторых классов предпочтений

Аркадий Арсеньевич Новоселов
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Кафедра высшей и прикладной математики
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. *В работе приводятся методы построения канонических представляющих функционалов в классах предпочтений, описываемых ожидаемой полезностью, когерентными мерами риска и их обобщениями.*

Ключевые слова. *Риск, предпочтение, каноническая мера риска, ожидаемая полезность, когерентная мера риска.*

1 Введение

Одной из основных задач теории принятия решений в условиях риска является представление качественного отношения предпочтения на множестве рисков в количественном виде: а именно, в виде функционала (меры риска), заданного на множестве рисков, и согласованного с исходным отношением предпочтения. Различные аспекты этой задачи представлены, например, в [2].

Представление мерой риска, как показано в [3], не единственно, поскольку любое строго монотонное преобразование приводит к представлению того же отношения предпочтения. В этой связи в [3] введено понятие канонического представляющего функционала. Такой функционал для каждого отношения предпочтения определен уже единственным образом. Более того, ввиду специфики канонизации, такой функционал можно использовать в качестве детерминированного эквивалента, а в моделях финансового риска - и в качестве цены финансовых инструментов.

В настоящей работе описываются методы построения канонических представляющих функционалов для предпочтений из классов ожидаемой полезности [1], когерентных мер риска [7], их частного случая - функционалов возмущенной вероятности [9], а также обобщенных когерентных мер риска [4], [8].

В параграфе 2 приводятся необходимые сведения из теории представления предпочтений, в параграфе 3 описаны используемые классы предпочтений, а в параграфе 4 описаны методы построения канонических функционалов, см. также [5], [6].

2 Предпочтения и меры риска

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{X}$ — совокупность всевозможных случайных величин, заданных на нем, и обладающих конечным математическим ожиданием. Следуя традиции [7], элементы $\mathcal{X}$ мы будем также называть *рисками.* Отметим также, что $\mathcal{X}$ можно отождествить с нормированым пространством L_1.

Полное транзитивное отношение $\preceq$ на $\mathcal{X}$ называется [2] *отношением предпочтения.* Для $X, Y \in \mathcal{X}$ мы будем интерпретировать отношение $X \preceq Y$ как "X не лучше Y". Асимметричную часть $\preceq$ обозначают $\prec$ и интерпретируют, как "строго хуже" , а симметричная часть $\sim$ представляет соой отношение эквивалентности с прозрачной интерпретацией.

При некоторых неограничительных условиях [2], [5] отношение предпочтения $\preceq$ можно представить функционалом $f = f_{\preceq}$ в смысле

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow f(X) \leq f(Y),\ X, Y \in \mathcal{X}. \qquad (1)$$

Такое представление предпочтения оказывается неединственным. В частности, применение к $f_{\preceq}$ строго монотонного преобразования приводит к функционалу, представляющему то же отношение предпочтения $\preceq$. Верно и обратное, так что класс $\mathcal{M}(\preceq)$ всех функционалов, представляющих некоторое отношение предпочтения $\preceq$, состоит из строго монотонных преобразований любого своего элемента [5].

Неединственность представления представляет собой серьезную проблему, и в [3] было предложено использовать канонические представления, обладающие свойством

$$f(aI) = a,\ a \in \mathbf{R}, \qquad (2)$$

где I обозначена постоянная случайная величина

$$I(\omega) = 1,\ \omega \in \Omega,$$

обладающая вырожденной функцией распределения

$$W_1(x) = \mathbf{P}(I \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Такие представления удобны еще тем, что они являются и детерминированными эквивалентами [6], что позволяет использовать их в качестве цены рискованных финансовых инструментов.

Представляющий функционал $f_{\preceq}$ принято называть *мерой риска* [7]. Это название не вполне удачно, поскольку значения этого функционала $f(X)$ ни в какой мере не отражают количество риска, заключенное в аргументе X. Однако, терминологическая традиция уже сложилась в таком виде, и мы будем ей следовать.

3 Классы предпочтений

В настоящей работе будут рассматриваться следующие классы предпочтений. Первый из них, класс линейных предпочтений, был аксиоматически введен в [1]. Так же было показано, что представляющим функционалом для этого отношения предпочтения является функционал ожидаемой полезности

$$u(X) = \mathbf{E}(U(X)),\ X \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

где U — вещественная функция полезности, задающая этот функционал.

Следующий класс предпочтений задается когерентными мерами риска [7], в частности, мерами возмущенной вероятности [9]. Функционал f, заданный на $\mathcal{X}$, называется когерентной мерой риска [7], если он обладает свойствами монотонности (M), положительной однородности (PH), супераддитивности (SA) и инвариантности относительно сдвигов (TI):

$$\begin{aligned} (M) &\ :\ X \le Y \Longrightarrow f(X) \le f(Y) \\ (PH) &\ :\ \lambda \ge 0 \Longrightarrow f(\lambda X) = \lambda f(X) \\ (SA) &\ :\ f(X+Y) \ge f(X) + f(Y) \\ (TI) &\ :\ f(X + aI) = f(X) + a,\ a \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Известно [7], [5], что когерентные меры риска можно охарактеризовать в терминах *множеств приемлемых рисков*. Обозначим $C_+ = \{X \ge 0\} \subseteq \mathcal{X}$ конус неотрицательных случайных величин, а $C_{--} = \{X < 0\} \subseteq \mathcal{X}$ — конус отрицательных случайных величин. Множество $A \subseteq \mathcal{X}$ называется множеством приемлемых рисков, если оно является выпуклым замкнутым (в топологии пространства L_1) конусом, обладающим свойствами $C_+ \subseteq A$, $C_{--} \cap A = \emptyset$. Когерентная мера риска f_A определяется своим конусом приемлемых рисков A по формуле

$$f_A(X) = \sup\{b \in \mathbf{R} :\ X - bI \in A\},\quad X \in \mathcal{X}.$$

Обобщенные когерентные меры риска [4] задаются по конусу приемлемых рисков A посредством нормы $\|\cdot\|$ по формуле

$$f_A(X) = \delta_A(X) \inf_{Y \in \partial A} \|X - Y\|,$$

где

$$\delta_A(X) = \begin{cases} 1, & X \in A \\ 0, & X \notin A \end{cases}$$

обозначена индикаторная функция множества A.

4 Методы построения канонических представлений

Рассмотрим функционал ожидаемой полезности. Если функция полезности U строго возрастает и имеет обратную U^{-1}, то канонический функционал u_C имеет вид

$$u_C(X) = U^{-1}\left(\mathbf{E}U(X)\right),\ X \in \mathcal{X}.$$

В этом легко убедиться, заметив, что $\mathbf{E}U(aI) = U(a)$, так что, действительно, $u_C(aI) = a$, $a \in \mathbf{R}$.

Когерентные меры риска устроены таким образом, что исходный функционал сам является каноническим. Это вытекает из аксиом положительной однородности и инвариантности. Действительно, аксиома положительной однородности дает $f(0) = 0$, что вместе со свойством инвариантности приводит к результату $f(aI) = f(0 + aI) = f(0) + a = a$, который и означает каноничность произвольной когерентной меры риска.

Функционал возмущенной вероятности [9] также, очевидно, обладает свойствами положительной однородности и инвариантности относительно сдвигов, откуда аналогично вытекает его каноничность.

Обобщенные когерентные меры риска [4] в исходном виде, вообще говоря, не являются каноническими функционалами, и требуют некоторых преобразований для достижения каноничности. Как отмечается в [6], для произвольной положительно однородной меры риска f приведение к каноническому виду f_C производится по формуле

$$f_C(X) = \begin{cases} f(X)/f(I), & f(X) \ge 0 \\ -f(X)/f(-I), & f(X) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку обобщенные когерентные меры риска являются положительно однородными [4], вычисление канонического функционала для них также производится по формуле (4), поэтому для построения канонизирующего преобразования достаточно вычислить $f(I)$ и $f(-I)$.

В качестве примера рассмотрим случай $\mathcal{X} = \mathbf{R}^2$, $A = C_+$ и $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. При этом $f(I) = 1$ и $f(-I) = -2$, так что канонизирующее преобразование f имеет вид

$$f_C(X) = \begin{cases} f(X), & X \in C_+ \\ \frac{1}{2}f(X), & X \notin C_+ \end{cases}$$

В работе предложена методология вычисления канонических мер риска, введенных ранее в [3], для некоторых классов предпочтений и представляющих их функционалов, а именно: для линейного предпочтения (класс ожидаемой полезности), когерентных мер риска [7] и обобщенных когерентных мер риска [4]. Результаты работы могут быть распространены и на другие популярные классы предпочтений, и могут использоваться при оценивании финансовых инструментов и страховых продуктов.

Список литературы

[1] О. Моргенштерн Дж. фон Нейман. *Теория игр и экономическое поведение.* Наука, М., 1970.

[2] А. А. Новоселов. *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения.* Наука, Новосибирск, 2001.

[3] А. А. Новоселов. Канонические представления полных и частичных предпочтений. *Труды III Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, 1:214–225, 2004.

[4] А. А. Новоселов. Обобщенные когеренные меры риска. *Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, 1:325–339, 2005.

[5] А. А. Новоселов. Представление предпочтений на множестве рисков вещественными функционалами. *Труды V Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, 1:151–165, 2006.

[6] А. А. Новоселов. Детерминированный эквивалент в моделях принятия решений в условиях риска. *Труды V Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, 1:166–177, 2006.

[7] J.-M. Eber D. Heath P. Artzner, F. Delbaen. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.

[8] A. Purnanandam R. Jarrow. Generalized coherent risk measures: the firm's perspective. *Finance Research Letters*, 2:23–29, 2005.

[9] S. Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26:71–92, 1996.