ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВЫХ БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

А.А. Новоселов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
anov@ksc.krasn.ru

Аннотация

В работе рассматривается проблематика использования информации об индивидуальных предпочтениях инвестора, в частности, кривых безразличия, в задачах портфельного анализа и принятия решений в условиях риска. Показано, что игнорирование такой информации в классических портфельных методах может приводить к неприемлемым решениям. Предлагается методика учета информации об индивидуальных предпочтениях в рассматриваемом классе задач. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова: принятие решений, риск, индивидуальные предпочтения, портфельный анализ, кривые безразличия, задача Марковица, ожидаемая полезность.

Введение

Кривые безразличия широко используются в экономическом анализе. Связанное с ними понятие (предельной) нормы замещения одного блага другим часто помогает в решении задач формирования оптимальной корзины благ в условиях ограниченных ресурсов. Аналогом понятия кривой безразличия в задачах принятия решений в условиях риска является понятие совокупности эквивалентных (одинаково предпочтительных) вероятностных распределений, которое порождается индивидуальными предпочтениями на множестве распределений. В простейших частных случаях такие классы эквивалентности также могут быть представлены в виде плоских кривых.

В классических задачах портфельного анализа учет индивидуальных предпочтений обычно производится лишь частично. Так, например, в известном методе Марковица [1] индивидуальные предпочтения описываются желательным уровнем средней доходности портфеля или ее дисперсии. Как показано далее в работе, при таком подходе возможно формирование портфеля, неприемлемого для рационального инвестора, причем этот факт в классических рамках остается скрытым. Поэтому для принятия обоснованных инвестиционных решений необходим более полный учет индивидуальных предпочтений.

В настоящей работе предлагается одна методика использования кривых безразличия при решении задач портфельного анализа [1,2], которую можно распространить и на другие проблемы принятия решений в условиях риска. В первом параграфе приведена постановка общей задачи принятия решений, а также ее частного случая - задачи портфельного анализа. Во втором параграфе вводится понятие кривых безразличия на множестве вероятностных распределений, представленных частью плоскости среднее значение - дисперсия распределения. Третий параграф посвящен исследованию классической задачи Марковица; с помощью кривых безразличия показывается механизм возникновения неприемлемых инвестиционных решений, и предлагается методика обнаружения "плохих" инвестиционных проектов для инвестора, максимизирующего ожидаемую полезность. В последнем параграфе приведены численные иллюстрации описанных эффектов, полученные для реальных данных с фондового рынка.

1. Принятие решений в условиях риска

Задача принятия решений в условиях риска формулируется следующим образом [3]. Обозначим $\mathbf{R}$ вещественную ось, и пусть $\mathbf{F}=\{F_y, y\in Y\}$ - совокупность вероятностных распределений на $\mathbf{R}$, параметризованная параметром y, пробегающим некоторое множество параметров Y. В классе $\mathbf{F}$ требуется найти наилучшее в некотором смысле распределение, а также соответствующее значение параметра $y\in Y$. Распределения обычно сравниваются посредством значений фиксированного функционала $g:\mathbf{F}\to\mathbf{R}$, и лучшим из двух распределений $F,G\in\mathbf{F}$ считается то их них, на котором значение функционала g больше.

Примером задачи принятия решений может служить задача портфельного анализа [2]. Обозначим $\overline{X}=(X_1,X_2,...,X_n)^T$ случайный вектор со значениями в $\mathbf{R}^n$, компоненты которого имеют смысл дохода, приносимого рыночными инструментами при инвестировании в них *единичного* капитала. Рассмотрим множество параметров $Y=\{y=(y_1,y_2,...,y_n)^T : y_1+...+y_n=1\}$, представляющее собой плоскость стандартного симплекса в $\mathbf{R}^n$. Компоненты вектора y имеют смысл долей капитала, инвестируемого в соответствующий рыночный инструмент, а сам вектор y может быть истолкован, как инвестиционная стратегия. Для каждого вектора $y\in Y$ случайная величина $X(y)=y_1X_1+...+y_nX_n=y^T\overline{X}$ является доходом портфеля, сформированного посредством инвестиционной стратегии y, а ее распределение $F_y(x)=\mathbf{P}(X(y)\le x)$, $x\in\mathbf{R}$ задает соответствующий элемент $\mathbf{F}$.

2. Кривые безразличия

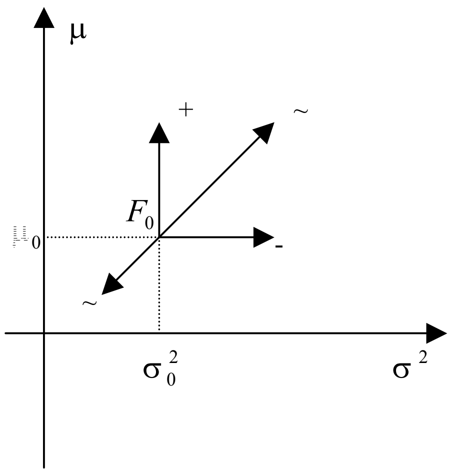
В настоящей работе мы будем рассматривать двухпараметрические семейства распределений $\mathbf{F}$, так что каждый элемент из $\mathbf{F}$ вполне определяется значениями математического ожидания и дисперсии распределения. В задаче портфельного анализа такая ситуация возникает, когда совместное распределение инвестиционных инструментов $\overline{X}$ является многомерным нормальным распределением с вектором средних $m=(m_1,...,m_n)^T$ и ковариационной матрицей V. При этом все элементы семейства $\mathbf{F}$ оказываются одномерными нормальными распределениями со средним значением $\mu=m^Ty$ и дисперсией $\sigma^2=y^TVy$ [3]. Другим примером двухпараметрического семейства может служить совокупность логнормальных распределений с параметрами $a\in\mathbf{R}$ и $s>0$, плотность которого задается выражением

$$f_{a,s}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}sx}\exp\left(-\frac{(\ln x-a)^2}{2s^2}\right).$$

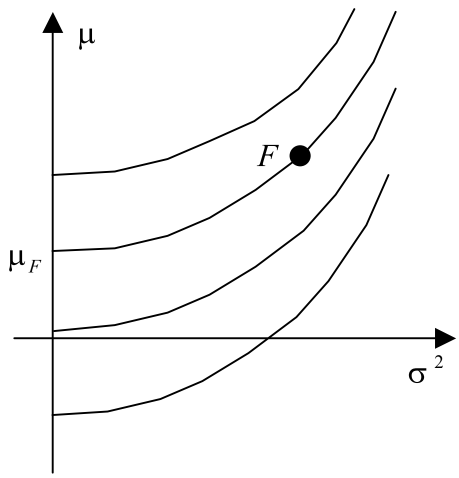
Параметры распределения a,s выражаются через заданные среднее значение μ и дисперсию σ^2 по формулам

$$s^2=\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right),\qquad a=\ln\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2+\sigma^2}}.$$

Следуя парадигме [1], будем считать, что при одинаковых средних значениях более предпочтительным является распределение с меньшей дисперсией, а при одинаковых дисперсиях - распределение с большим средним значением. Пусть $\mathbf{F}$ - произвольное двухпараметрическое семейство распределений. На плоскости "дисперсия-среднее значение" (σ^2, μ) (или "стандартное отклонение-среднее значение" (σ, μ)) можно изобразить кривые безразличия, состоящие из точек, соответствующих одинаково предпочтительным (с точки зрения данной задачи принятия решений и фиксированного инвестора) распределениям. Зафиксируем на этой плоскости произвольную точку (σ_0^2, μ_0), соответствующую распределению F^0. Все распределения, лежащие правее данной точки, являются менее предпочтительными, чем F^0. Распределения, расположенные выше данной точки, являются более предпочтительными, чем F^0. Из соображений непрерывности следует ожидать, что распределения, столь же предпочтительные, сколь и F^0, располагаются от F^0 к "северо-востоку", как показано на рисунке 1.а. Ясно, что и противоположное направление соответствует неизменной предпочтительности. Задание направлений неизменной предпочтительности в каждой точке правой полуплоскости (σ^2, μ) определяет в этой области семейство кривых безразличия, пример которого приведен на рисунке 1.б. Отметим, что величина μ_F, среднее значение распределения с нулевой дисперсией, лежащего на той же кривой безразличия, что и распределение F, может быть истолкована, как *детерминированный эквивалент* распределения F.



а)



б)

Рис. 1. Кривые безразличия на плоскости (σ^2, μ)

Приведем примеры семейств кривых безразличия, получающихся при использовании в задачах принятия решений некоторых конкретных функционалов, задающих отношение предпочтения на множестве распределений. Пусть класс $\mathbf{F}$ состоит из нормальных распределений с параметрами μ, σ^2. В качестве функционала, задающего предпочтения, выберем функционал ожидаемой полезности [4]

$$h(F) = E_F U = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dF(x), \qquad F \in \mathbf{F}$$

где $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - функция полезности. Будем рассматривать случай показательной функции полезности

$$U(x) = (1 - e^{-\alpha x}), \qquad x \in R \quad - \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ - параметр, характеризующий неприятие риска лицом, принимающим решения. Как показано в [3], при сформулированных предположениях справедливо представление

$$h(F) = 1 - \exp\left(\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} - \alpha\mu\right),$$

поэтому кривые безразличия (постоянства значений функционала h) имеют вид

$$\sigma^2 = \frac{2}{\alpha}(\mu - c),$$

где c - произвольная постоянная, задающая конкретную кривую семейства. Видно, что в координатах (σ^2, μ) кривые безразличия имеют вид параллельных лучей, исходящих из точек вида $(0, c)$, как показано на рисунке 2, причем $tg(\beta) = 2/\alpha$.

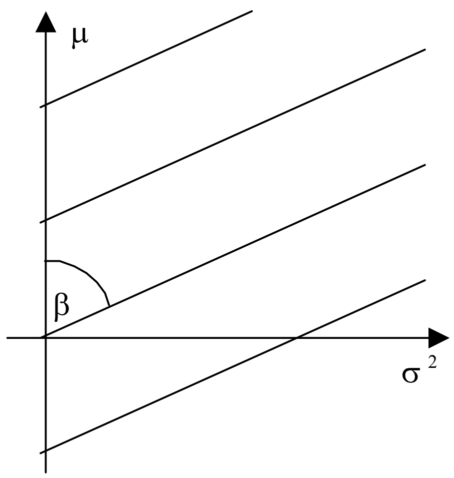


Рис. 2. Кривые безразличия для показательной полезности
в классе нормальных распределений.

3. Задача Марковица

Рассмотрим, какие выводы можно извлечь из представленной картины предпочтений для классической задачи портфельного анализа - задачи Марковица. Напомним, что в этой задаче совместное распределение инвестиционных инструментов $\overline{X}$ предполагается нормальным с вектором средних m и ковариационной матрицей V, и предлагается выбирать инвестиционную стратегию, обеспечивающую наименьшую дисперсию распределения портфеля $X(y)$ при заданном среднем значении распределения портфеля M:

$$y^T V y \to \min_y,$$

$$m^T y = M,$$

$$I^T y = 1,$$

где $I^T = (1,1,...,1)$. Как показано в [3], решение этой задачи эквивалентно максимизации ожидаемой полезности с показательной функцией полезности, точнее, задачи

$$\mathbf{E}U(X(y)) \to \max_y ,$$
$$I^T y = 1 ,$$
при условии, что параметр неприятия риска α выбирается согласованно с параметром M задачи Марковица. Для описания этого согласования напомним некоторые обозначения из [3]: V^{-1} есть матрица, обратная к V, $(\cdot,\cdot)$ обозначает энергетическое скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, то есть, $(u,v) = u^T V^{-1} v$ для $u, v \in \mathbf{R}^n$, а $\|\cdot\|$ - соответствующую энергетическую норму: $\|u\| = \sqrt{u^T V^{-1} u}$, $u \in \mathbf{R}^n$. Символом Δ обозначается величина $\Delta = \|m\|^2 \|I\|^2 - (m,I)^2$, которая положительна, как определитель матрицы Грама. В этих обозначениях упомянутая эквивалентность задач достигается выбором $\alpha = [M \|I\| \ -(m,I)]/\Delta$, что может быть также записано в виде обратного соотношения $M = [\alpha\Delta + (m,I)]/\|I\|^2$. Точка, изображающая оптимальный портфель на плоскости (σ^2, μ), а также соответствующая кривая безразличия, являющаяся касательной к эффективной границе задачи Марковица, приведены на рисунке 3.

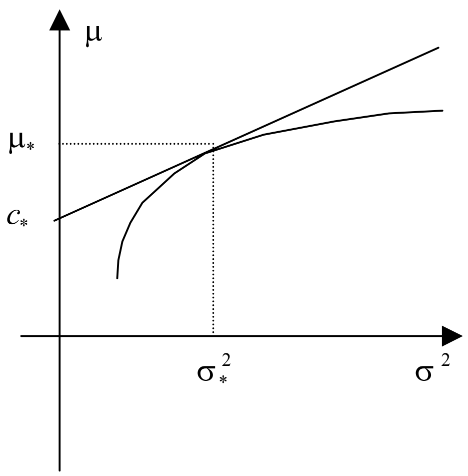


Рис. 3. Решение и детерминированный эквивалент в задаче Марковица с нормальными инвестиционными инструментами

Из приведенного рисунка видно, что для инвестора со значительным неприятием риска (большим значением показателя α) касательная кривая безразличия может пересекать ось μ в точке с отрицательным значением доходности. Это означает, что детерминированный эквивалент оптимального портфеля отрицателен, то есть, сам оптимальный портфель, с точки зрения рассматриваемого инвестора, столь же "хорош", сколь и достоверный убыток!

Отсюда вытекает важность методики, которая позволяла бы по характеристикам инструментов и описанию предпочтений инвестора (семейству кривых безразличия) определять, имеет ли смысл решение задачи поиска оптимального портфеля, или даже оптимальный портфель окажется непривлекательным для инвестора. Ниже обосновывается такая методика для случая нормального совместного распределения инвестиционных инструментов и предпочтений инвестора, задаваемых показательной функцией полезности.

Напомним, что уравнение эффективной границы в задаче Марковица с параметрами m и V имеет вид [3]

$$\sigma^2 = f(\mu) = \frac{1}{\Delta}\left[\| I \|^2 \mu^2 - 2(m,I)\mu + \| m \|^2\right], \qquad \mu \ge \frac{(m,I)}{\| I \|^2},$$

а кривая безразличия описывается уравнением

$$\sigma^2 = g_c(\mu) = \frac{2}{\alpha}(\mu - c), \qquad \mu \ge c.$$

Из условия совпадения значений функций f и g, а также их производных в точке, соответствующей оптимальному портфелю, получаем уравнения для определения оптимальных значений μ и c, из которых имеем

$$\mu_* = \frac{1}{\| I \|^2}\left[(m,I) + \frac{\Delta}{\alpha}\right], \quad \sigma_*^2 = \frac{1}{\| I \|^2}\left[1 + \frac{\Delta}{\alpha^2}\right], \quad c_* = \frac{1}{\| I \|^2}\left[(m,I) + \frac{\Delta}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}\right].$$

Заметив, что значение c_* есть не что иное, как детерминированный эквивалент оптимального портфеля, получаем условие безубыточности оптимального портфеля при инвестировании *единичного* капитала в виде $c_* \ge 1$. Для определения диапазона значений α, в котором обеспечивается указанное неравенство, заметим, что выражение для c_* является убывающей функцией α, поэтому достаточно найти корень α_{cr} уравнения $c_*(\alpha) = 1$, при этом искомый диапазон будет иметь вид $\alpha \le \alpha_{cr}$. Поскольку выписанное уравнение имеет единственный положительный корень $\alpha_{cr} = (m,I) - \| I \|^2 + \| I \| \cdot \| I - m \|$, получаем окончательное ограничение для инвестора: при фиксированных параметрах инвестиционных инструментов m, V детерминированный эквивалент оптимального портфеля принимает значения, не меньшие начального единичного капитала, если показатель α неприятия риска инвестора удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le (m,I) - \| I \|^2 + \| I \| \cdot \| I - m \|. \qquad (2)$$

Таким образом, для инвестора, максимизирующего ожидаемую полезность с функцией полезности (1), и имеющего показатель неприятия риска α, необходимо по известным характеристикам m, V совместного распределения инструментов $\overline{X}$ вычислить критический уровень неприятия риска (правую часть неравенства (2)), и проверить выполнение неравенства (2). При нарушении последнего набор инструментов $\overline{X}$ использовать для инвестирования не следует.

4. Численная иллюстрация

Проиллюстрируем эффект возникновения убыточных оптимальных портфелей на реальных данных, представляющих собой котировки закрытия обыкновенных акций восьми американских корпораций, собранные за период с 4 января 1999 года по 12 января 2001 года, всего 513 торговых дней. В таблице 1 приведены наименования корпораций и их номера, а в таблицах 2-7, содержащих расчетные данные, ссылки на инструменты произведены по их номерам из таблицы 1. Сначала вычислялись оптимальные портфели Марковица для наборов из трех инструментов (акций) с различными горизонтами инвестирования: 30, 90 и 150 торговых дней. Результаты приведены в таблицах 2, 3 и 4, соответственно. Здесь μ_* обозначает ожидаемую доходность, σ_*^2 - дисперсию, c_* - детерминированный эквивалент оптимального портфеля для инвестора, максимизирующего ожидаемую полезность дохода портфеля с показателем неприятия риска $\alpha = 2$. Кроме этого, в таблицах приведены также значения критического уровня α_{cr} (правой части неравенства (2)), и, справочно, величина r_{cr}.

Таблица 1. Инвестиционные инструменты, обыкновенные акции корпораций

№	Фирма	Обозначение
1	Dell	dell
2	Hewlett Packard	hwp
3	Intel	intc
4	JPMorgan	jpm
5	Microsoft	msft
6	Oracle	orcl
7	Sun Systems	sunw
8	Yahoo	yhoo

Таблица 2. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 30 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3	1.067	0.056	1.011	2.448	0.249
2, 3, 4	1.009	0.012	0.997	1.469	0.331
3, 4, 5	1.013	0.017	0.996	1.615	0.317
4, 5, 6	1.109	0.065	1.044	4.620	0.148
5, 6, 7	1.175	0.098	1.077	4.934	0.139
6, 7, 8	1.226	0.093	1.133	7.311	0.095

Таблица 3. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 90 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3	1.435	0.327	1.108	2.876	0.222
2, 3, 4	1.083	0.071	1.012	2.394	0.253
3, 4, 5	1.087	0.073	1.014	2.441	0.250
4, 5, 6	1.353	0.211	1.141	5.409	0.127
5, 6, 7	1.796	0.493	1.304	4.591	0.149
6, 7, 8	2.298	0.528	1.770	9.439	0.073

Таблица 4. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 150 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3	2.210	0.764	1.446	4.272	0.159
2, 3, 4	1.414	0.250	1.164	5.137	0.134
3, 4, 5	1.419	0.255	1.163	4.992	0.138
4, 5, 6	1.606	0.357	1.249	5.862	0.118
5, 6, 7	2.601	0.959	1.643	5.190	0.132
6, 7, 8	5.688	2.258	3.430	9.668	0.072

Содержательно значение r_{cr} равно максимальной цене, которую инвестор, максимизирующий ожидаемую полезность, и обладающий критическим уровнем неприятия риска α_{cr}, готов уплатить за участие в лотерее, в которой выигрыши 0 и 1 появляются с вероятностью 1/2 каждый. Для сравнения укажем, что риск-нейтральный инвестор (максимизирующий среднее значение распределения, соответствует уровню неприятия риска $\alpha = 0$), готов заплатить за участие в такой лотерее цену 0.5, а с увеличением величины α значение соответствующей цены уменьшается, и в пределе, при стремлении α к бесконечности, становится равным 0. Уровню неприятия риска гипотетического инвестора $\alpha = 2$ соответствует цена $r = 0.283$, указанная в заголовках таблиц.

Анализ данных таблиц 2-4 показывает, что при горизонте инвестирования 30 дней имеется два набора инструментов: акции hpw, intc, jpm и intc, jpm, msft (выделены в таблице 2 заливкой), которые даже в результате оптимизации дают портфели, эквивалентные чистому убытку. Этот факт можно обнаружить по значению c_*, которое оказывается меньшим 1, или по значению критического уровня неприятия риска α_{cr}, которое оказывается меньшим 2. При других горизонтах инвестирования все наборы инструментов оказываются способными обеспечить безубыточный оптимальный портфель.

Таблица 5. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 30 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3, 4	1.066	0.042	1.024	3.760	0.178
2, 3, 4, 5	1.014	0.014	0.998	1.743	0.305
3, 4, 5, 6	1.110	0.065	1.044	4.649	0.147
4, 5, 6, 7	1.172	0.094	1.077	6.254	0.111
5, 6, 7, 8	1.271	0.129	1.143	8.838	0.078

Таблица 6. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 90 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3, 4	1.481	0.281	1.200	6.218	0.111
2, 3, 4, 5	1.090	0.075	1.014	2.463	0.248
3, 4, 5, 6	1.365	0.216	1.149	5.702	0.121
4, 5, 6, 7	1.891	0.488	1.403	9.215	0.075
5, 6, 7, 8	3.044	1.046	1.997	12.336	0.056

Таблица 7. Параметры оптимальных портфелей и критические уровни α_{cr}, r_{cr}; инвестиционный горизонт 150 дней, $\alpha = 2$, $r = 0.283$

Инструменты	μ_*	σ_*^2	c_*	α_{cr}	r_{cr}
1, 2, 3, 4	2.430	0.764	1.665	10.815	0.064
2, 3, 4, 5	1.438	0.264	1.174	5.192	0.132
3, 4, 5, 6	1.636	0.373	1.263	6.016	0.115
4, 5, 6, 7	2.813	0.971	1.842	11.487	0.060
5, 6, 7, 8	5.902	2.439	3.462	18.548	0.037

В таблицах 5-7 приведены аналогичные данные для наборов из четырех инструментов. В данном случае только один набор: hpw, intc, jpm, msft при горизонте инвестирования 30 дней оказывается неспособным обеспечить оптимальный портфель, эквивалентный безубыточному.

Отметим, что анализ был проведен только для инвестора, максимизирующего ожидаемую полезность, и только при одном, довольно малом, значении неприятия риска $\alpha = 2$. Более осторожные инвесторы будут склонны отвергнуть большее количество наборов инструментов. Отметим также, что в вышеприведенном анализе для простоты не учитывалась временная стоимость денег. Ее нетрудно учесть посредством надлежащего дисконтирования при расчете доходностей на заданном горизонте инвестирования.

Стоит также обратить внимание на тот факт, что анализ усложняется и теряет в наглядности в случаях, когда классы вероятностных распределения оказываются более чем двухпараметрическими. Аналогичный эффект возникает, когда индивидуальные предпочтения описываются не ожидаемой полезностью, а другим, нелинейным функционалом. Это, впрочем, не препятствует проведению описанного анализа численными методами. Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, мы не будем здесь останавливаться на этих вопросах.

Заключение

В работе показано, что при построении оптимальных портфелей классическими методами портфельного анализа, оптимальный портфель может оказаться эквивалентным чистому убытку, с точки зрения предпочтений инвестора, для которого строится портфель. Предложена методика устранения этого недостатка, основанная на использовании классов эквивалентности распределений, в простейших случаях представимых кривыми безразличия. Методика проиллюстрирована расчетными примерами.

Автор благодарен участникам ФАМ Семинара за обсуждение проблем портфельного анализа и принятия решений в условиях риска, которые способствовали улучшению настоящей работы.

Литература

1. Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, p. 77-91.
2. Новоселов А.А. Портфельный анализ. *Труды I Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*. Красноярск: ИВМ СО РАН, т. 1, 2002, с. 217-230.
3. Новоселов А.А. *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения*. Новосибирск: Наука, 2001, 102 с.
4. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970, 708с.