НЕЛИНЕЙНЫЙ ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

А.А. Новоселов
Красноярский государственный университет
Кафедра ценных бумаг и страхового дела
anov@ksc.krasn.ru

Аннотация

В работе рассматривается проблема распределения ограниченных ресурсов в условиях вероятностной неопределенности (риска). Приведен пример, в котором классические теории второго порядка оказываются неработоспособными. Представлены современные методы портфельного анализа, справляющиеся с проблемой.

Введение

Задачу портфельного анализа (или распределения ограниченных ресурсов) можно неформально представить следующим образом: имеется несколько направлений инвестирования (инвестиционных инструментов), каждое из которых может принести не вполне определенный результат (доход); требуется распределить ресурсы (капитал) таким образом, чтобы достигнуть наилучшего в некотором смысле результата. Близкой по духу является и задача принятия решений, когда нужно выбрать один из нескольких проектов, каждый из которых также приносит не вполне определенный заранее доход. Поскольку неопределенность результата обычно моделируется теоретико-вероятностными методами, задача сводится к сравнению вероятностных распределений.

В классическом портфельном анализе сравнение распределений производится на основании только двух моментов распределения: математического ожидания и дисперсии; или, в многомерном случае, вектора средних значений и ковариационной матрицы. Этот подход, который естественно назвать теорией второго порядка (по количеству используемых моментов распределения), восходит к работам Марковица, Тобина, и для статического случая получает логическое завершение в модели эффективного рынка CAPM Шарпа. Динамический вариант подхода был применен в работах Блэка, Шоулза и Мертона для вычисления цены опционов. Теорию второго порядка можно также называть линейной теорией по структуре методов решения получаемых задач.

Линейная теория хорошо работает в случае нормального совместного распределения инструментов; фактически предположение о нормальности распределений явно или неявно присутствует во всех упомянутых работах. Однако, эмпирическое изучение распределений, встречающихся на фондовом рынке, в кредитных портфелях банков, других инвестиционных инструментов, показывает существенное отклонение реальных распределений от нормального. В частности, распределения кредитных портфелей обычно обладают ярко выраженной асимметрией и тяжелыми хвостами [1], а в совместных распределениях многих фондовых инструментов обнаружены нелинейные зависимости [2]; эти эффекты несовместимы с предположением нормальности.

Одним из эффективных способов преодоления указанных трудностей является использование аппарата ожидаемой полезности [3]. Эта методология позволяет эффективно обрабатывать асимметричные распределения, а также улавливать некоторые типы нелинейных зависимостей между инструментами. Однако, функционал ожидаемой полезности является линейным относительно операции смеси распределений; это обстоятельство препятствует его использованию в тех случаях, когда индивидуальные предпочтения нелинейны в этом смысле; экспериментальные свидетельства нелинейности такого рода описаны, например, в [4].

Дальнейшее улучшение качества методов принятия инвестиционных решений связано с использованием нелинейных функционалов, появившихся сравнительно недавно [5], а также с использованием индивидуальных предпочтений в качестве исходной информации для построения методов принятия решений [6].

В настоящей работе на простом примере показаны недостатки теории второго порядка, и продемонстрировано применение функционалов ожидаемой полезности и возмущенной вероятности к проблеме формирования инвестиционного портфеля.

Пример распределения инструментов

Рассмотрим случайные величины X_1 и X_2 со следующими распределениями Бернулли:

$$P\{X_1 = 0\} = 0.1\,,\ P\{X_1 = 10\} = 0.9\,,\ P\{X_2 = 8\} = 0.9\,,\ P\{X_2 = 18\} = 0.1\,. \tag{1}$$

Графики функций вероятности (дискретной "плотности распределения") этих случайных величин приведены на следующем рисунке.

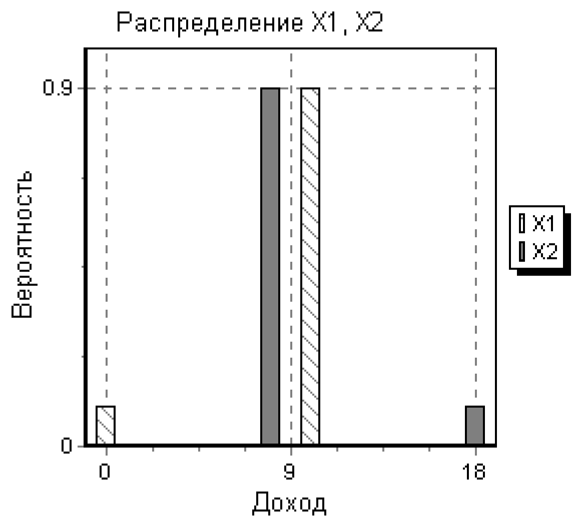

Рис. 1 Распределения инструментов X_1 и X_2

Этот пример допускает следующую содержательную трактовку. Предположим, что индивидуум обладает состоянием в 10 единиц, которое может быть полностью уничтожено в результате неблагоприятного события, наступающего (в течение рассматриваемого периода времени, например, 1 года) с вероятностью 0.1. Если индивидуум не проявляет никакой финансовой активности, то его состояние через год описывается случайной величиной X_1. Индивидуум может застраховать свое состояние (имущество), уплатив страховую премию в размере 1 единицы, в результате чего его состояние уменьшится до 9 единиц, и не изменится ни при каких случайных обстоятельствах, поскольку убыток, нанесенный страховым событием, будет покрыт страховой компанией, продавшей полис. Предположим теперь, что страховой полис продается только в комплекте с лотерейным билетом стоимостью в 1 единицу, который с вероятностью 0.1 принесет через год выигрыш размером в 10 единиц, а с вероятностью 0.9 - никакого выигрыша. Если индивидуум купит страховку с лотерейным билетом, то его состояние через год будет описываться случайной величиной X_2.

Итак, собственник имущества сталкивается с дилеммой: какой из вариантов X_1, X_2 лучше. Большинство людей без колебаний отдают предпочтение проекту с результатом X_2 (некоторые, впрочем, избегают общения с финансовыми организациями, и так же уверено останавливают свой выбор на X_1). Однако, простым подсчетом нетрудно убедиться в том, что математические ожидания и дисперсии этих случайных величин совпадают:

$$\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_2 = 9\,,\ \mathbf{D}X_1 = \mathbf{D}X_2 = 9\,, \tag{2}$$

так что теории второго порядка не сделают между этими проектами никакого различия, посчитав их эквивалентными, хотя большинство рациональных инвесторов такие проекты четко различают. Осторожные инвесторы, скорее всего, выберут проект X_2, в котором отсутствуют резкие отклонения от среднего значения в меньшую сторону (убытки). Далее мы рассмотрим, как производится выбор между этими проектами (по существу, вероятностными распределениями) методом второго порядка и другими методами принятия решений, а также изучим методы построения оптимальных портфелей из инструментов, представленных случайным вектором (X_1, X_2):

$$X_y = yX_1 + (1-y)X_2\,,\quad y \in \mathbf{Y}\,. \tag{3}$$

Здесь y обозначает вес первого инструмента в портфеле, а допустимое множество $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{R} = (-\infty,\infty)$ может иметь, например, вид $[0,1]$ или $\mathbf{R}$, что определяется существом рассматриваемой задачи. В частности, в задаче выбора проекта, допустимое множество $\mathbf{Y}$ является двухточечным: $\mathbf{Y} = \{0,1\}$.

Отметим, что распределение дохода портфеля (3) определяется не только маргинальными распределениями (1), но и структурой зависимости компонент случайного вектора (X_1, X_2), которую в рассматриваемом простом случае можно описать одним параметром, например, $m = \mathbf{P}\{X_1 = 10, X_2 = 18\}$. Значения этого параметра не могут быть произвольными вероятностями, поскольку они должны лежать в границах Фреше, которые в данном случае имеют вид $0 \le m \le 0.1$. При $m = 0.09$ получается распределение с независимыми компонентами, а граничные значения m соответствуют комонотонной зависимости ($m = 0.1$) и антикомонотонной зависимости ($m = 0$); в последнем случае имеет место $X_1 + X_2 = 18$ с вероятностью 1, и корреляция (X_1, X_2) равна минус 1. Интересно отметить, что максимальная корреляция, соответствующая значению $m = 0.1$, оказывается существенно меньшей 1.

Метод второго порядка

Поскольку математические ожидания распределений X_1 и X_2 совпадают, метод второго порядка сводится к минимизации дисперсии распределения X_y, которая имеет вид

$$s(y) = DX_y = 4(y^2 - y)(9 - 50m) + 9.$$

Минимизация функции s по y дает оптимальное значение $y^* = 1/2$, как и следовало ожидать в столь симметричной задаче; минимальная дисперсия оказывается равной $s(y^*) = 50m$, и, в частности, равна нулю для антикомонотонных инструментов. Интересно отметить, что диверсификация достигается даже при максимальной положительной зависимости инструментов, имеющей место при $m = 0.1$; дисперсия оптимального портфеля оказывается равной 5, то есть, почти в 2 раза меньше дисперсии каждого из инструментов. Следующий рисунок иллюстрирует зависимость дисперсии портфеля X_y от веса y при различных значениях параметра m.

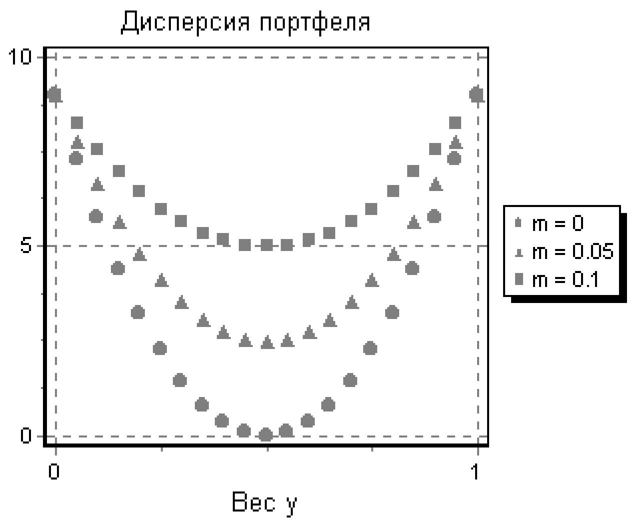

Рис. 2. Критерий оптимальности в задаче второго порядка

Отметим ярко выраженную симметрию критерия оптимальности относительно инструментов X_1, X_2. В описываемых далее методах более высокого порядка такая симметрия появляется только в виде исключения.

Максимизация ожидаемой полезности

Теперь применим для решения задачи метод ожидаемой полезности. Пусть U - некоторая вещественная функция полезности. Если U является возрастающей и строго вогнутой функцией, то есть,

$$U(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda U(x) + (1-\lambda)U(y), \quad x, y \in R, \quad \lambda \in (0,1),$$

то U характеризует инвестора, не приемлющего риск [7]. Примером такого рода функций полезности являются элементы экспоненциального класса

$$U(x) = (1 - e^{-\alpha x})/(1 - e^{-\alpha}), \qquad x \in R \tag{4}$$

при $\alpha > 0$. При заданной функции полезности U ожидаемая полезность $\rho(X)$ произвольного проекта (портфеля) X вычисляется по формуле

$$\rho(X) = EU(X) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dF_X(x),$$

где F_X - функция распределения случайной величины X. В частности, для дискретных случайных величин, принимающих значения x_k с вероятностями $p_k = P\{X = x_k\}$, $k = 1,...,N$, справедлива формула

$$\rho(X) = \sum_{k=1}^{N} U(x_k) p_k . \tag{5}$$

Задача выбора проекта сводится к сравнению ожидаемых полезностей $\rho(X_1)$, $\rho(X_2)$ проектов X_1, X_2. Оказывается, что инвестор, предпочтения которого описываются функцией полезности (4) с каким-либо параметром $\alpha > 0$, предпочитает проект X_2. Не останавливаясь здесь на строгом доказательстве этого факта, проиллюстрируем его графиком зависимости разности $\rho(X_2) - \rho(X_1)$ от значения параметра α.

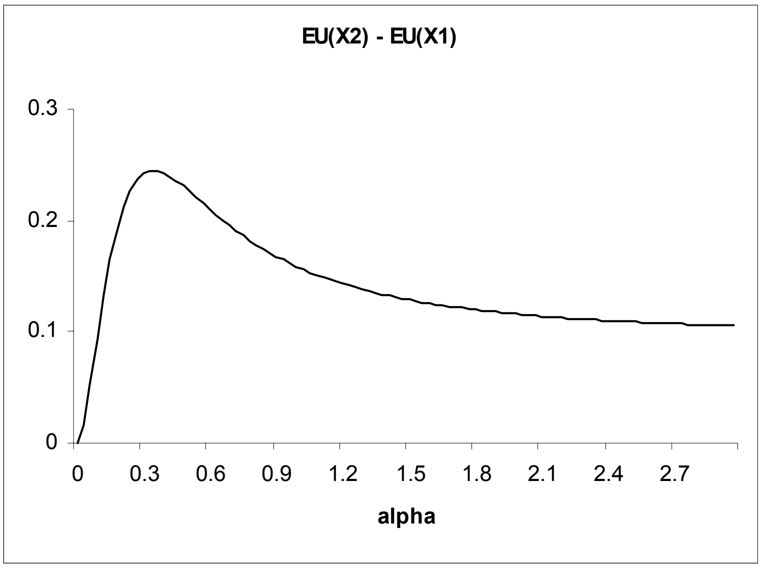

Рис. 3. Зависимость разности ожидаемых полезностей от параметра α

Далее применим метод ожидаемой полезности к задаче формирования портфеля (3), используя функции полезности из экспоненциального класса (4). Здесь требуется найти такое значение веса y, при котором реализуется $\max\limits_{y} \mathbf{E}U\left(X_y\right)$. Явное представление для максимизируемой ожидаемой полезности легко получается из (5). Исследуем зависимость решения от значений параметров задачи α, m.

Отметим здесь, что ввиду монотонности U максимизация ожидаемой полезности портфеля эквивалентна максимизации его детерминированного эквивалента, который для произвольной случайной величины X задается посредством

$$c(X) = U^{-1}(\mathbf{E}U(X)),$$

где U^{-1} - функция, обратная к U. Поэтому характеристики ρ и c взаимозаменяемы, и использование той или другой из них в каждом конкретном случае определяется соображениями удобства.

Далее, заметим, что предельный случай $\alpha = 0$ соответствует линейной функции полезности $U(x) \equiv x$, которая описывает инвестора, нейтрального по отношению к риску [7]. Такой инвестор максимизирует среднее значение дохода портфеля $\mathbf{E}X_y$, которое в нашем случае постоянно и равно 9, так что смешивать инструменты в портфеле можно с произвольным весом y.

Другой крайний случай соответствует значению параметра зависимости $m = 0$. При этом инструменты X_1, X_2 оказываются идеально отрицательно коррелированными (то есть, связанными линейной функциональной зависимостью $X_2 = 18 - X_1$ с отрицательным коэффициентом), и смешивание их в портфеле с весом $y = 1/2$ дает идеально диверсифицированный портфель с вырожденным распределением $X_{1/2} = 9$. Такой портфель является оптимальным для произвольного инвестора с функцией полезности из класса (4).

При $\alpha > 0$ функция полезности (4) описывает инвестора, не приемлющего риск. Если $m > 0$, то идеальная корреляция инструментов невозможна, и максимизация ожидаемой полезности всегда приводит к нетривиальному решению, на которое оказывает влияние как степень неприятия риска α, так и характер зависимости инструментов, описываемый параметром m.

Далее представлены графики критерия оптимальности (детерминированного эквивалента) рассматриваемой задачи для нескольких значений параметра α.

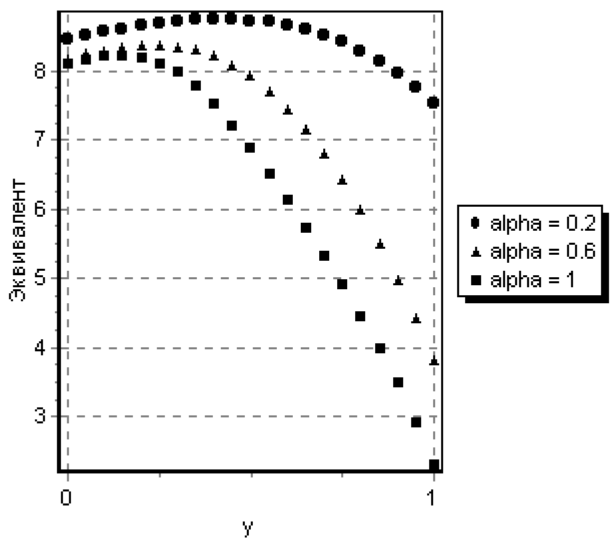

Рис. 4. Детерминированный эквивалент портфеля.

При небольших значениях параметра неприятия риска (α = 0.2) значения целевой функции слабо зависят от веса y, а форма графика близка к симметричной. С увеличением неприятия риска форма графика существенно отклоняется от симметричной, и все большая доля капитала направляется на инвестирование во второй инструмент X_2.

На следующем рисунке представлены графики зависимости оптимального веса портфеля от параметра α при нескольких значениях параметра m.

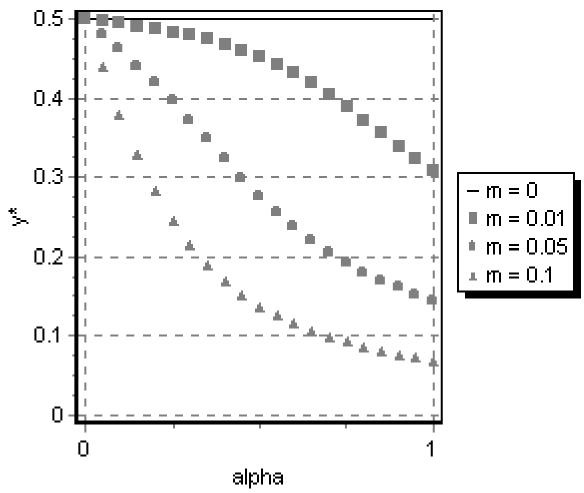

Рис. 5. Зависимость распределения капитала от неприятия риска

Интересно отметить, что за исключением выделенных крайних случаев, доля y всегда оказывается меньше 1/2, то есть, второй инструмент X_2 всегда входит в портфель с большим весом, что можно истолковать, как его предпочтительность перед X_1 в рамках портфельного анализа.

Метод возмущенной вероятности

Теперь рассмотрим применение метода возмущенной вероятности, который заключается в максимизации функционала возмущенной вероятности на заданном множестве распределений. Для функции распределения F этот функционал вычисляется по одной из формул [5], [6]:

$$\pi(F) = \int_{-\infty}^{0} \left[1 - g\left(1 - F(x)\right)\right]dx + \int_{0}^{\infty} g\left(1 - F(x)\right)dx = \int_{0}^{1} F^{-1}(1-v)dg(v),$$

где монотонная функция g, являющаяся параметром данного функционала, служит для возмущения вероятности, задана на отрезке [0,1], и обладает свойствами $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(x) \le x$, $x \in [0,1]$. В частности, для дискретного распределения F, описываемого значениями x_k, упорядоченными по возрастанию, и вероятностями p_k, $k = 1,..., N$, справедливы формулы [6]:

$$\pi(F)=\sum_{k=1}^{n}x_k\left[g\left(\sum_{i=k}^{n}p_i\right)-g\left(\sum_{i=k+1}^{n}p_i\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})g\left(\sum_{i=k}^{n}p_i\right), \qquad (6)$$

где используется обычное соглашение (пустая сумма полагается равной 0), и введено обозначение $x_0=0$. Отметим здесь, что значение этого функционала на распределении портфеля (3) с необходимостью будет представлять собой кусочно-линейную функцию от веса y.

Рассмотрим класс степенных возмущающих функций вида

$$g(v)=v^{\alpha},\ \alpha>1.$$

Здесь параметр α может служить индикатором неприятия риска. При $\alpha=1$ значение функционала возмущенной вероятности совпадает со средним значением распределения, так что инвестор, принимающий решения с помощью такого функционала, является нейтральным по отношению к риску. Случай $\alpha>1$ соответствует инвестору, не приемлющему риск.

Обратимся к проблеме выбора между проектами. Вычисление значений функционала π на распределениях F_1, F_2 проектов X_1, X_2 из нашего основного примера без труда производится по формулам (6). Не вдаваясь в технические детали, приведем здесь график разности $\pi(F_2)-\pi(F_1)$:

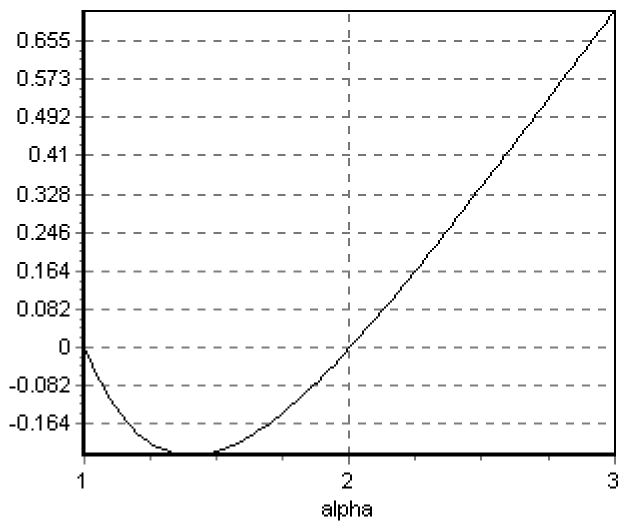

Рис. 6. Разность значений функционала возмущенной вероятности

Видно, что инвесторы, не приемлющие риск, по-разному производят выбор между проектами. Инвесторам, умеренно не приемлющим риск ($1<\alpha<2$), более предпочтительным представляется проект X_1, тогда как инвесторы с сильным неприятием риска ($\alpha>2$) предпочитают X_2. Такое явно нелинейное поведение функционала возмущенной вероятности позволяет улавливать с его помощью нелинейные свойства реальных предпочтений, отмечавшиеся в [4].

Рассмотрим теперь задачу формирования инвестиционного портфеля X_y, определенного в (3), из инструментов X_1, X_2. Эта задача сводится к максимизации функционала возмущенной вероятности портфеля, как функции веса y. На рисунке 7 представлены графики этого критерия оптимальности при нескольких значениях параметров инвестора α и распределения m. Видно, что оптимальным может быть либо портфель, целиком состоящий из одного инструмента, либо портфель, в котором инструменты представлены равными долями. Этот факт поддается строгому обоснованию при произвольных значениях параметров $\alpha > 1$, $0 \le m \le 0.1$. В предельном случае инвестора, нейтрального по отношению к риску ($\alpha = 1$), как и следовало ожидать, функционал возмущенной вероятности принимает постоянное значение 9, совпадающее с ожидаемым доходом портфеля. В предельном случае идеальной обратной коррелированности инструментов ($m = 0$), конечно же, оптимальным оказывается портфель с равным представительством инструментов ($y = 0.5$).

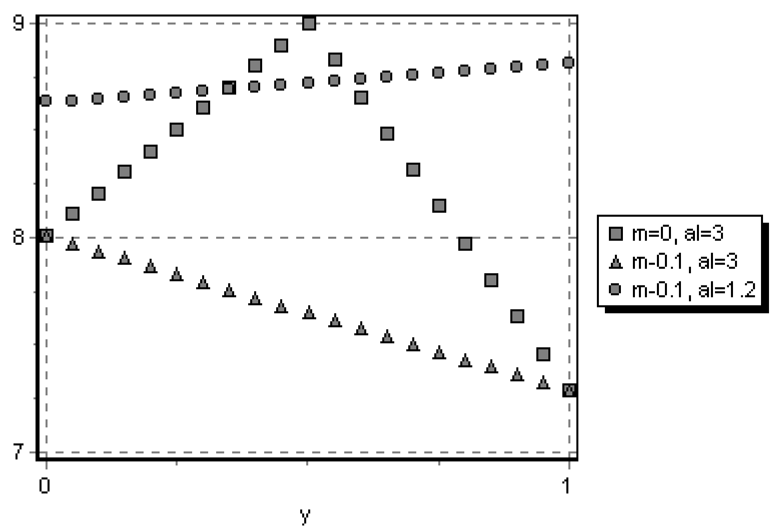

Рис. 7. Возмущенная вероятность портфеля

Заключение

В работе на простом примере показана неспособность классических теорий второго порядка представлять отношение предпочтения лиц, принимающих решения (инвесторов), при наличии асимметричных вероятностных распределений. Представлены и проиллюстрированы методы современного портфельного анализа и принятия решений в условиях вероятностной неопределенности (риска): метод ожидаемой полезности и метод возмущенной вероятности.

Высказанная в работе критика в адрес методов второго порядка вовсе не означает отрицание их роли для теории или приложений. В области теории, скажем, модель Марковица и CAPM еще долго будут служить базой для построения более реалистичных, в том числе, неравновесных, моделей. В приложениях использование методов высокого порядка при недостаточном количестве исходных данных может оказаться неоправданным. Разумная стратегия в теоретической части, по-видимому, может быть выражена словами "больше методов хороших и разных", а в плане прикладном - состоит в подборе адекватной модели для каждой конкретной ситуации.

Автор выражает свою искреннюю признательность участникам ФАМ Семинара за многократные обсуждения самых разных вопросов теории риска, которые оказали существенное влияние, в частности, и на содержание настоящей работы.

Программа для операционной системы Windows 95 (или выше), с помощью которой можно воспроизвести эксперименты с примером, описанным в работе, опубликована в сети Интернет по адресу

http://anov.narod.ru/download.htm#NonlinIll

Литература

1. *CreditMetrics - technical document*. JPMorgan & Co., New York, 1997, 200p.
2. McNeil A.J., Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *J. of Empirical Finance*, **7** (2000), 271-300.
3. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970, 708с.
4. Cox L.A. *Risk Analysis: Foundations, Models and Methods*. Kluwer, 2001, 568 p.
5. Wang S. Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin*, **26** (1996), 1, 71-92.
6. Новоселов А.А. *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения*. Новосибирск: Наука, 2001, 102 с.
7. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32** (1964), p. 122-136.