Равномерное распределение на стандартном симплексе в $\mathbf{R}^n$

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

В лекции рассматривается один метод генерации равномерного распределения на стандартном симплексе в $\mathbf{R}^n$.

Содержание

1 Введение

При решении многих задач оптимизации, в частности, связанных с формированием портфеля, методом Монте – Карло, возникает необходимость в воспроизведении равномерного распределения на стандартном симплексе в $\mathbf{R}^n$:

$$S_n = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n |\ y_1, ..., y_n \geq 0,\ y_1 + ... + y_n = 1\}. \tag{1}$$

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть $(X_1, ..., X_n)$ – случайный вектор, компоненты которого описывают доходности некоторых финансовых операций при вложении в них единичного капитала. Тогда при распределении единичного капитала между этими операциями будет получена доходность $X = y_1X_1 + ... + y_nX_n$,

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

где y_i – доля капитала, вложенная в i – ю операцию, $i = 1, ..., n$. Типичная задача формирования портфеля имеет вид

$$f(y_1, ..., y_n) = H(X) \to \max_{(y_1,...,y_n)} \quad (\min_{(y_1,...,y_n)}); \tag{2}$$

при ограничениях

$$y_1, ..., y_n \geq 0; \quad y_1 + ... + y_n = 1, \tag{3}$$

где H – некоторая мера риска.

Ниже описан один эффективный метод получения равномерного распределения на стандартном симплексе S_n. Для дальнейшего обозначим $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, $i = 1, ..., n$ единичные орты в $\mathbf{R}^n$, $Co(A)$ – выпуклую оболочку множества $A \subseteq \mathbf{R}^n$,

$$J = (1, 1, ..., 1) \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

2 Моделирование равномерного распределения

Рассматриваемый метод заключается в преобразовании равномерного распределения на единичном гиперкубе в требуемое распределение. Опишем это преобразование по шагам. Схема последовательности преобразований имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc} C_{n-1} & \xrightarrow{G} & \overline{V}_I & \xrightarrow{F} & W & \xrightarrow{M} & Y & \xrightarrow{P} & S_n \\ U & \to & T & \to & R & \to & Z & \to & Q \end{array}, \tag{5}$$

где в верхней строке перечислены множества, на которых последовательно задается равномерное распределение и указываются преобразования одного множества в другое, а в нижней строке приведены случайные величины, имеющие равномерное распределение на соответствующих множествах.

2.1 Распределение на C_{n-1}

Обозначим $C_{n-1} = [0, 1]^{n-1}$ единичный гиперкуб в $\mathbf{R}^{n-1}$. Равномерное распределение на C_{n-1} получается обычным способом как вектор

$$U = (U_1, ..., U_{n-1}) \tag{6}$$

с независимыми компонентами, каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

2.2 Распределение на V_I

Пусть Π – совокупность всевозможных перестановок $\pi = (i_1, ..., i_{n-1})$ на множестве $\{1, 2, ..., n-1\}$, и $I = (1, 2, ..., n-1)$ – тождественная перестановка. Для перестановки $\pi = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \Pi$ обозначим V_π совокупность точек $y = (y_1, ..., y_{n-1}) \in C$, обладающих свойством $y_{i_1} < y_{i_2} < ... < y_{i_{n-1}}$, а $\overline{V}_\pi$ – его замыкание

$$\overline{V}_\pi = \{y = (y_1, ..., y_{n-1}) | y_{i_1} \leq ... \leq y_{i_{n-1}} \}.$$

В частности, для тождественной перестановки I имеем

$$V_I = \{y = (y_1, ..., y_{n-1}) | \ y_1 < ... < y_{n-1}\}.$$

Из соображений симметрии ясно, что области $V_\pi,\ \pi \in \Pi$ конгруэнтны, следовательно, имеют одинаковый $(n-1)$ – мерный объем, равный $1/(n-1)!$. Таким образом, объем фигуры

$$V = \sum_{\pi \in \Pi} V_\pi$$

равен 1, и вектор U с вероятностью 1 лежит в V. Отметим, что $C_{n-1} \setminus V$ состоит из точек, имеющих хотя бы две совпадающие координаты, и $\bigcup_{\pi \in \Pi} \overline{V}_\pi = C_{n-1}$.

Обозначим $G : C_{n-1} \to \overline{V}_I$ отображение упорядочения координат вектора $y \in C_{n-1}$ по возрастанию. Для фиксированной перестановки $\pi \in \Pi$ сужение этого отображения $G_\pi : V_\pi \to V_I$ на V_π является, очевидно, взаимно–однозначным и сохраняющим объем. Поэтому

$$T = G(U) \tag{7}$$

имеет равномерное распределение на $\overline{V}_I$, причем $T \in V_I$ с вероятностью 1.

2.3 Распределение на W

Обозначим

$$W = \{y \in \mathbf{R}^{n-1} |\ y_1 \geq 0, ..., y_{n-1} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n-1} y_i \leq 1\} = Co\{0, e_1, ..., e_{n-1}\} \tag{8}$$

и рассмотрим отображение $F : \overline{V}_I \to W$, ставящее точке $y = (y_1, ..., y_{n-1}) \in \overline{V}_I$ в соответствие точку $y' = (y'_1, ..., y'_{n-1})$ по правилу

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1, \\ y'_1 &= y_2 - y_1, \\ &... \\ y'_{n-1} &= y_{n-1} - y_{n-2}. \end{aligned}$$

Ясно, что $y' = Ay$, где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

F является невырожденным линейным взаимно–однозначным отображением на W, поэтому фигуры одинакового объема в $\overline{V}_I$ переводит в фигуры одинакового объема в W. Отсюда вытекает, что

$$R = F(T) \tag{9}$$

имеет равномерное распределение на W.

2.4 Распределение на S_n

Для $y = (y_1, ..., y_{n-1}) \in W$ построим точку $y' = (y'_1, ..., y'_n) \in \mathbf{R}^n$ по правилу

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1, \\ &..., \\ y'_{n-1} &= y_{n-1}, \\ y'_n &= 1 - y_1 - ... - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Ясно, что отображение $y' = E(y)$ является отображением W на S_n. Для доказательства линейности этого отображения представим его в виде композиции линейного растяжения в $\mathbf{R}^{n-1}$ и движения в $\mathbf{R}^n$.

2.4.1 Растяжение в $\mathbf{R}^{n-1}$

Преобразуем W в фигуру $Y \subset \mathbf{R}^{n-1}$, конгруэнтную S_n, следующим образом. Заметим, что единичные орты e_i лежат друг от друга на одинаковом расстоянии $\sqrt{2}$, и найдем точку $A \in \mathbf{R}^{n-1}$, находящуюся на таком же расстоянии от всех единичных ортов $\mathbf{R}^{n-1}$, и лежащую по ту же сторону от плоскости

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i = 1, \tag{10}$$

что и начало координат. Из соображений симметрии ясно, что эта точка имеет вид $A = (a, a, ..., a)$, причем $a < 0$. Вычисляя квадрат евклидова расстояния от A до e_1, получаем $|A - e_1|^2 = 2$, что приводит к уравнению

$$(n-1)a^2 - 2a - 1 = 0,$$

которое имеет единственный отрицательный корень

$$a = \frac{1 - \sqrt{n}}{n-1}.$$

Правильный многогранник $Co\{A, e_1, ..., e_{n-1}\}$ представляет собой искомую фигуру Y, конгруэнтную S_n. Отметим, что точка $A = (a, ..., a)$ лежит от C – центра $S_{n-1} = Co\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ – на расстоянии в $\beta = \sqrt{n}$ раза большем, чем начало координат.

Построим теперь M: аффинное преобразование W на Y. Для произвольной точки $y = (y_1, ..., y_{n-1}) \in W$ вычислим сначала ближайшую к ней точку $\widetilde{y}$ симплекса S_{n-1}, затем в качестве образа y выберем точку $z = \widetilde{y} + \beta(y - \widetilde{y})$, лежащую на прямой, проходящей через $y, \widetilde{y}$, на расстоянии от $\widetilde{y}$ в β раз большем, чем y. Ясно, что построенное преобразование является аффинным (см. упражнение 3.1) отображением W на Y.

Точка $\widetilde{y}$ вычисляется следующим образом: ясно, что она может быть представлена в виде $\widetilde{y} = y + \alpha_y J$, где вектор J задан в (4), а постоянная α_y определяется из условия нормировки (сумма координат $\widetilde{y}$ равна 1):

$$\alpha_y = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i}{n-1}.$$

Преобразование M проиллюстрировано рисунком 1.

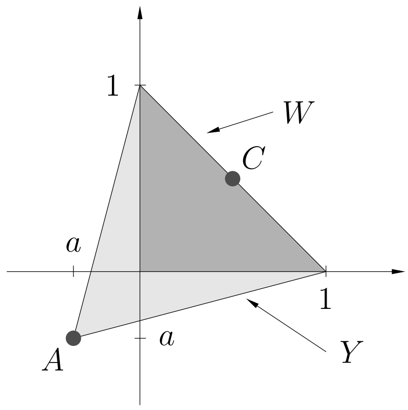

Рис. 1: Преобразование W в Y

Таким образом,

$$M(y) = y - (\beta - 1)\alpha_y J, \tag{11}$$

и случайная величина

$$Z = M(R) \tag{12}$$

имеет равномерное распределение на Y.

2.4.2 Распределение на S_n

Последним шагом преобразования является поворот P фигуры Y в $\mathbf{R}^n$, оставляющий на месте S_{n-1}, и переводящий точку A в e_n: $P(Y) = S_n$, $P(S_{n-1}) = S_{n-1}$, $P(A) = e_n$. Доказательство существования такого поворота предоставляется читателю (см. упражнение 3.2). Поскольку P сохраняет $(n-1)$–мерный объем, случайный вектор

$$Q = P(Z) \tag{13}$$

имеет равномерное распределение на S_n.

Последовательность преобразований от C_{n-1} до Y показана на рисунке 2 для $n = 3$ и выборки из 20 точек. Сплошными кругами представлены точки, которые были перемещены при упорядочении. На рисунке 3 приведены результаты моделирования 500 точек при $n = 3$ в проекции на плоскость.

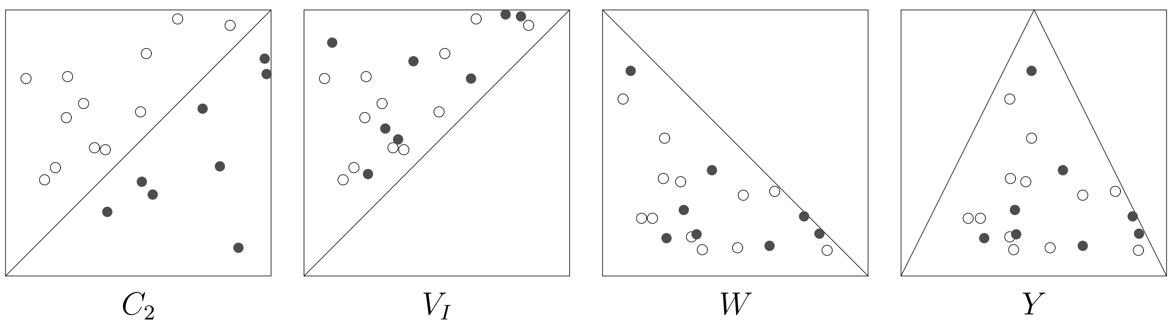

Рис. 2: Последовательность преобразований

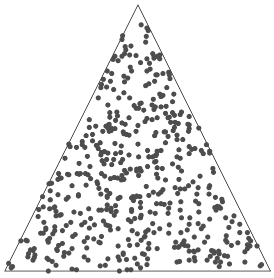

Рис. 3: Большая выборка

3 Упражнения

Упражнение 3.1 *Доказать аффинность преобразования M из п. 2.4.1 явным построением матрицы B и вектора c таких, что $M(y) = By + c$.*

Упражнение 3.2 *Выписать явно преобразование поворота из п. 2.4.2 построением матрицы B и вектора c таких, что $P(y) = By + c$.*

Список литературы

[1] В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **1,2**, М.: Мир, 1984.

[2] Лоэв М. *Теория вероятностей.* М.: Изд-во иностр. литер., 1962.