Простые страховые портфели

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов СибГТУ

Содержание

1 Введение

Одним из важнейших вопросов, стоящих перед страховой компанией при введении нового вида страхования, является размер страхового взноса (страховой премии, тарифа), который следует взимать с клиента, для обеспечения устойчивого функционирования компании и выполнения ею своих обязательств. В настоящей лекции этот вопрос рассматривается с позиций портфельного подхода, и значение тарифной ставки определяется из условия покрытия предстоящих убытков собранными премиями с заданной вероятностью

$$\mathbf{P}\{C \leq Q\} = \alpha, \tag{1}$$

где C – случайная величина, описывающая совокупные убытки (страховые выплаты) по портфелю, Q – суммарная величина страховых премий портфеля, α – "уровень безопасности"или вероятность покрытия, устанавливаемая страховой компанией, $\alpha \in [0, 1]$. Типичными являются значения $0.8 \leq \alpha \leq 0.95$. Тариф T устанавливается в долях страховой суммы (максимальной ответственности по договору страхования).

Далее рассмотрим три типа портфелей, условно называемых здесь "простейшим "простым"и "реальным каждый последующий из которых является обобщением предыдущего. Любой из этих портфелей состоит из N однотипных договоров, в каждом из которых с вероятностью p наступает (и с вероятностью $1 - p$ не наступает в течение всего срока действия договора) страховое событие. Различие между типами

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

портфелей заключается в условиях формирования страховых выплат (убытков) и уточняется ниже.

2 Вычисление тарифной ставки

Общая схема вычисления тарифной ставки такова. Пусть Q – суммарная премия портфеля, C – совокупные убытки портфеля. Обозначим F_C функцию распределения случайной величины C, а F – функцию распределения центрированной и нормированной случайной величины

$$C^0 = \frac{C - \mathbf{E}C}{\sqrt{\mathbf{D}C}},$$

где $\mathbf{E}C$ и $\mathbf{D}C$ обозначены математическое ожидание и дисперсия C, соответственно. Тогда (1) эквивалентно

$$\alpha = \mathbf{P}\left\{\frac{C - \mathbf{E}C}{\sqrt{\mathbf{D}C}} \le \frac{Q - \mathbf{E}C}{\sqrt{\mathbf{D}C}}\right\} = \mathbf{P}\left\{C^0 \le \frac{Q - \mathbf{E}C}{\sqrt{\mathbf{D}C}}\right\} = F\left(\frac{Q - \mathbf{E}C}{\sqrt{\mathbf{D}C}}\right),$$

откуда получаем основное соотношение для вычисления тарифа

$$Q = \mathbf{E}C + \sqrt{\mathbf{D}C}F^{-1}(\alpha), \tag{2}$$

где F^{-1} обозначена функция, обратная к F.

В случаях, когда определение типа распределения C затруднительно, а объем портфеля N достаточно велик, можно со ссылкой на центральную предельную теорему считать распределение C приближенно нормальным, и вместо (2) использовать уравнение

$$Q = \mathbf{E}C + \sqrt{\mathbf{D}C}\Phi^{-1}(\alpha), \tag{3}$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

2.1 Простейший страховой портфель

Рассмотрим простейший страховой портфель, состоящий из N договоров страхования, в каждом из которых с вероятностью p может наступить страховое событие. При наступлении страхового события выгодоприобретателю (застрахованному или его наследнику) выплачивается полная страховая сумма, и договор страхования прекращается. Если же страховое событие в течение срока действия договора не наступило, то договор прекращается без каких – либо страховых выплат.

При рассмотрении простейшего портфеля будем считать, что страховые суммы всех договоров одинаковы и равны S. Отсюда вытекает, что страховая премия по каждому договору равна TS, так что совокупный размер премии портфеля вычисляется по формуле

$$Q = TSN. \tag{4}$$

Страховой убыток по договору i представляет собой, очевидно, случайную величину C_i со следующим распределением:

Значение	0	S
Вероятность	$1-p$	p

,

а совокупные убытки портфеля C получаются суммированием убытков отдельных договоров

$$C = C_1 + ... + C_N.$$

Считая убытки по отдельным договорам независимыми, приходим к выводу, что C имеет биномиальное распределение с характеристиками

Значение	0	S	$2S$	...	NS
Вероятность	p_0	p_1	p_2	...	p_n

, (5)

где

$$p_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Для биномиального распределения (5), как известно,

$$\mathbf{E}C = NSp, \quad \mathbf{D}C = NS^2 p(1-p). \tag{6}$$

Здесь обращение функции распределения C при больших N может представлять собой непростую задачу, поэтому считаем распределение C приближенно нормальным, и используем (3), откуда, с учетом (4) и (6)

$$TSN = pSN + \sqrt{NS^2 p(1-p)}\Phi^{-1}(\alpha),$$

так что выражение для тарифной ставки приобретает вид

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\Phi^{-1}(\alpha) \tag{7}$$

$$= p\left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{Np}}\Phi^{-1}(\alpha)\right). \tag{8}$$

Из (7) видно, что тарифная ставка состоит из двух частей

$$T_0 = p, \quad T_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\Phi^{-1}(\alpha),$$

которые принято называть основной частью тарифной ставки и рисковой надбавкой, соответственно. Второе слагаемое в скобках в (8) равно, очевидно,

$$T_{rr} = T_r / T_0,$$

и может быть названо относительной рисковой надбавкой.

Зависимость тарифной ставки (7), (8) от параметров проиллюстрирована далее в п. 3.

2.2 Простой страховой портфель

Теперь рассмотрим простой страховой портфель. Он во многом напоминает простейший портфель, и единственное отличие заключается в том, что в различных договорах могут быть предусмотрены различные страховые суммы. Таким образом, простой страховой портфель задается параметрами N, p, α, имеющими тот же смысл, что и в п. 2.1, а также страховыми суммами $S_1, ..., S_N$. Для дальнейшего введем обозначения

$$\overline{S}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i, \quad \overline{\overline{S}}_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2}. \tag{9}$$

Обозначив, как и раньше, неизвестную тарифную ставку T, получим размер страховой премии по i – му договору в виде TS_i, так что совокупный размер премии оказывается равным

$$Q = T\sum_{i=1}^{N} S_i = TN\overline{S}_N. \tag{10}$$

Убыток C_i по договору i является случайной величиной, принимающей значение S_i с вероятностью p, и значение 0 с вероятностью $1-p$, так что ее среднее есть $\mathbf{E}C_i = pS_i$, а дисперсия: $\mathbf{D}C_i = p(1-p)S_i^2$. Распределение убытков портфеля $C = C_1+...+C_N$ оказывается в данном случае существенно сложнее, чем для простейшего портфеля, поэтому снова предположим, что объем портфеля достаточно велик для применения центральной предельной теоремы, вычислим параметры распределения C:

$$\mathbf{E}C = p\sum_{i=1}^{N} S_i = pN\overline{S}_N, \quad \mathbf{D}C = p(1-p)\sum_{i=1}^{N} S_i^2 = p(1-p)N\overline{\overline{S}}_N^2,$$

и, используя (2), (10), придем к следующему уравнению относительно T:

$$TN\overline{S}_N = pN\overline{S}_N + \overline{\overline{S}}_N\sqrt{p(1-p)N}\,\Phi^{-1}(\alpha),$$

откуда

$$T = p + \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\,\Phi^{-1}(\alpha) \tag{11}$$

$$= p\left(1 + \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{1-p}{pN}}\,\Phi^{-1}(\alpha)\right). \tag{12}$$

Запишем выражения для основной части ставки, а также абсолютной и относительной рисковых надбавок:

$$T_0 = p, \;\; T_r = \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\,\Phi^{-1}(\alpha), \;\; T_{rr} = \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{1-p}{pN}}\,\Phi^{-1}(\alpha).$$

Сравнивая (11), (12) с выражениями для тарифной ставки в простейшем портфеле (7), (8), замечаем, что они отличаются лишь коэффициентом $\beta(S) = \overline{\overline{S}}_N/\overline{S}_N$ при рисковой надбавке, где $S = (S_1, .., S_N)$. Интересно выяснить, в каких пределах может изменяться этот коэффициент при изменении набора страховых сумм S. Обозначим $\mathbf{R}_+^N = \{S \in \mathbf{R}^N : S_1 \geq 0, ..., S_N \geq 0\}$ неотрицательный ортант $\mathbf{R}^N$, являющийся областью всевозможных значений S.

Предложение 2.1

$$1 \leq \beta(S) \leq \sqrt{N}, \; S \in \mathbf{R}_+^N. \tag{13}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\beta^2(S) = N\frac{S_1^2 + ... + S_N^2}{(S_1 + ... + S_N)^2}, \tag{14}$$

так что $\beta(\gamma S) = \beta(S)$ при любом $\gamma > 0$, поэтому достаточно определить границы изменения $\beta(S)$ для S, принадлежащих стандартному симплексу $\mathbf{R}^N$:

$$\mathbf{S} = \{S \in \mathbf{R}_+^N : S_1 + ... + S_N = 1\}.$$

Поскольку знаменатель выражения (14) постоянен на $\mathbf{S}$, для вычисления минимума $\beta(S)$ на $\mathbf{S}$ необходимо решить задачу минимизации

$$f(S) = S_1^2 + ... + S_N^2 \to \min_{S\in\mathbf{S}}, \tag{15}$$

$$g(S) = S_1 + ... + S_N - 1 = 0. \tag{16}$$

Применяя к этой задаче метод множителей Лагранжа, запишем функцию Лагранжа

$$L(S, \lambda) = f(S) + \lambda g(S)$$

и необходимые условия минимума

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = 2S_i + \lambda = 0, \;\; i = 1, ..., N, \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_1 + ... + S_N - 1 = 0. \tag{18}$$

Из (17) получаем $S_i = -\lambda/2, \; i = 1, ..., N$. Подставляя это в (18), имеем $\lambda = -2/N$, откуда

$$S_i^* = \frac{1}{N}, \; i = 1, ..., N.$$

Поскольку все координаты полученной точки неотрицательны, именно она и является точкой минимума $\beta(S)$ на $\mathbf{S}$. Таким образом, минимальное значение $\beta(S)$ достигается в геометрическом центре стандартного симплекса $S^* = (1/N, ..., 1/N)$, и, как нетрудно подсчитать, равно

$$\beta(S^*) = 1.$$

Из соображений симметрии ясно, что максимальное значение $\beta(S)$ на $\mathbf{S}$ достигается в вершинах стандартного симплекса, и равно

$$\beta(1, 0, ..., 0) = \sqrt{N}.$$

Предложение доказано. ◇

Из предложения 2.1 вытекает, что в случае одинаковых страховых сумм значение коэффициента β (и, следовательно, рисковой надбавки) минимально, а при наличии существенного разброса в значениях страховых сумм этот коэффициент увеличивается, приближаясь к максимуму в случае наличия одной резко выделяющейся страховой суммы.

2.3 Реальный страховой портфель

Реальный страховой портфель, рассматриваемый в данном параграфе, обладает всеми свойствами простого портфеля, отличие заключается в том, что убытки при наступлении страхового события, связанного с договором i, не обязательно равны страховой сумме договора S_i, а могут принимать произвольное значение из интервала $[0, S_i]$. Точнее: убытки i – го договора имеют вид

$$C_i = \xi_i r S_i,$$

где ξ_i, $i = 1, ..., N$ – бернуллиевские случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p, и значение 0 с вероятностью $1-p$ (индикаторы наступления страхового события по договору i), а r – случайная величина с распределением, сосредоточенным на $[0, 1]$. В данном параграфе считаем случайные величины $r, \xi_1, ..., \xi_N$ независимыми.

Пусть заданы среднее значение и дисперсия случайной величины r:

$$\mathbf{E}r = m, \quad \mathbf{D}r = \tau^2. \tag{19}$$

Тогда несложно вычислить параметры распределения убытка договора:

$$\mathbf{E}C_i = pmS_i, \quad \mathbf{D}C_i = S_i^2 pm^2 \left(1 - p + \frac{\tau^2}{m^2}\right) \tag{20}$$

и убытков портфеля $C = C_1 + ... + C_N$ в целом:

$$\mathbf{E}C = pmN\overline{S}_N, \quad \mathbf{D}C = pm^2 \left(1 - p + \frac{\tau^2}{m^2}\right) N\overline{\overline{S}}{}^2_N. \tag{21}$$

При тарифной ставке T премия по договору i составляет TS_i, а по портфелю в целом – $Q = TN\overline{S}_N$. Подставляя полученное выражение вместе с (21) в основное уравнение (2), получаем

$$TN\overline{S}_N = pmN\overline{S}_N + m\overline{\overline{S}}_N \sqrt{p(1 - p + \tau^2/m^2)N}\,\Phi^{-1}(\alpha),$$

откуда

$$\begin{aligned} T &= pm + m\frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p+\tau^2/m^2)}{N}}\Phi^{-1}(\alpha) && (22)\\ &= pm\left(1 + \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{1-p+\tau^2/m^2}{pN}}\Phi^{-1}(\alpha)\right) && (23) \end{aligned}$$

Выражения для основной части ставки и рисковых надбавок имеют вид

$$T_0 = pm, \;\; T_r = m\frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p+\tau^2/m^2)}{N}}\Phi^{-1}(\alpha), \;\; T_{rr} = \frac{\overline{\overline{S}}_N}{\overline{S}_N}\sqrt{\frac{1-p+\tau^2/m^2}{pN}}\Phi^{-1}(\alpha).$$

Сравнивая (22), (23) с выражениями для тарифной ставки простого портфеля (11), (12), видим, что основная часть тарифной ставки теперь равна pm, что по-прежнему совпадает со средними ожидаемыми убытками на 1 рубль страховой суммы, а в выражении для рисковой надбавки добавляется слагаемое τ^2/m^2, отражающее дополнительную неопределенность, вносимую вариацией страхового убытка.

3 Иллюстрации

Отметим, что практические вычисления тарифных ставок в страховых компаниях в соответствии с инструкциями Росстрахнадзора производятся по формуле вида (22), в которой коэффициент $\beta = \overline{\overline{S}}_N/\overline{S}_N$ заменен постоянной 1.2. В этой связи представляет интерес следующий вопрос: в каких пределах может изменяться β в реальных ситуациях? Чтобы ответить на этот вопрос, предположим, что размеры страховых сумм в портфеле являются реализациями случайной величины с функцией распределения G. При этом β также является случайной величиной, среднее значение $\mu = \mathbf{E}\beta$ и стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\beta}$ которой нетрудно оценить методом Монте – Карло. В следующей таблице приведены результаты такого оценивания для нескольких вариантов распределения G при объеме портфеля $N = 20$ и количестве испытаний Монте – Карло равном 10000. Видно, что для распределений G с тяжелыми хвостами (то есть допускающих относительно большие значения страховых сумм с заметной вероятностью) значение коэффициента β может существенно отличаться от 1.2 в сторону увеличения.

С видом распределений и смыслом их параметров можно ознакомиться, например, в [1].

Распределение G	μ	σ
Равномерное на $[0, A]$	1.154	0.048
Биномиальное, $n = 10, p = 0.3$	1.107	0.035
Биномиальное, $n = 20, p = 0.05$	1.395	0.135
Логнормальное, $\mu = 1, \nu = 0.3$	1.043	0.015
Логнормальное, $\mu = 1, \nu = 1$	1.454	0.229
Логнормальное, $\mu = 1, \nu = 2$	2.288	0.598

Список литературы

[1] Боровков А.А. (1986) *Теория вероятностей.* М.: "Наука 432 с.