Основные понятия теории риска

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

В лекции вводятся основные понятия теории риска, как теории принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. Приводится постановка задачи принятия решений, определяются направления исследований, описаны типичные приложения теории.

Содержание

1 Введение

Трудно, пожалуй, указать такую область человеческой деятельности, в которой возможны абсолютно точные и определенные предсказания будущих событий. Неопределенность может быть связана с самим фактом наступления событий, временем их наступления, количественными характеристиками событий и т.д. Несмотря на наличие такой неопределенности, мы вынуждены ежедневно принимать решения, рискуя, конечно же ошибиться, поскольку на результаты наших решений оказывают влияние не только сами решения, но и многие внешние факторы, которые мы будем объединять под понятием "состояние окружающей среды".

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

Теория риска – суть теория принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В настоящей лекции вводятся основные понятия теории риска и рассматриваются некоторые типичные задачи и области приложений.

2 Основные понятия

В данном параграфе рассматриваются некоторые базовые понятия теории риска [1].

2.1 Проблема принятия решения

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всевозможных состояний окружающей среды, $\mathcal{D}$ – множество всевозможных решений, $\mathcal{R}$ – множество результатов. Если принято решение $d \in \mathcal{D}$, а среда находится в состоянии $s \in \mathcal{S}$, то решение приводит к результату $r \in \mathcal{R}$, который вычисляется по формуле $r = G(s, d)$, то есть, является значением отображения $G : \mathcal{S} \times \mathcal{D} \to \mathcal{R}$.

На множестве результатов $\mathcal{R}$, как правило, задан некоторый естественный порядок или отношение предпочтения $\preceq$, так что для любой пары результатов $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ можно сказать, какой из них лучше: $r_1 \preceq r_2$ или $r_2 \preceq r_1$, или же они одинаково предпочтительны: $r_1 \preceq r_2$ и $r_2 \preceq r_1$. Если бы любое наше решение $d \in \mathcal{D}$ приводило к вполне определенному результату $r = \widetilde{G}(d) \in \mathcal{R}$, то, сравнивая между собой результаты $\widetilde{G}(d_1), \widetilde{G}(d_2)$, мы могли бы тем самым сравнивать и решения d_1, d_2, выбирая лучшее из них. Поскольку, кроме собственно решения, на результат влияет и неопределенное состояние среды, проблема принятия решения усложняется.

Пусть $\mathcal{S}$ снабжено σ – алгеброй $\mathcal{A}$ и вероятностной мерой $\mathbf{P}_{\mathcal{S}}$ так, что тройка $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P}_{\mathcal{S}})$ образует вероятностное пространство, являющееся моделью неопределенности окружающей среды. Пусть, кроме того, $\mathcal{R}$ также снабжено σ – алгеброй $\mathcal{B}$, так что пара $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ образует измеримое пространство. Будем считать, что при любом фиксированном $d \in \mathcal{D}$ отображение $G_d : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, задаваемое формулой $G_d(s) = G(s, d)$, $s \in \mathcal{S}$, является измеримым относительно пары σ – алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (этого всегда можно добиться выбором достаточно богатой σ – алгебры $\mathcal{A}$). При этом G_d задает на $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathbf{P}_{\mathcal{S}})$ случайный элемент, который порождает на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ вероятностное распределение $\mathbf{P}_d$:

$$\mathbf{P}_d(B) = \mathbf{P}_{\mathcal{S}}(G_d^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Для дальнейшего построения теории не важно, как появляются распределения $\mathbf{P}_d$ на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, поэтому будем просто считать, что задано семейство распределений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = \{\mathbf{P}_d, \ d \in \mathcal{D}\},$$

и в дальнейшем не будем рассматривать в явном виде $\mathcal{S}$.

Видно, что каждое решение d приводит не к какому-то определенному результату $r \in \mathcal{R}$, а к некоторому распределению на $\mathcal{R}$. Поэтому для сравнения решений недостаточно порядка (предпочтения) на $\mathcal{R}$. Необходимо задать порядок на множестве распределений.

2.2 Риск

Обозначим $\mathcal{P}$ совокупность всевозможных вероятностных распределений на $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$.

Определение 2.1 *Риском называется любое распределение* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$.

Если множество результатов лежит в множестве вещественных чисел: $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}$, то рисками являются распределения случайных величин, которые можно отождествлять с функциями распределения на вещественной прямой [2]. Другими примерами рисков могут служить распределения случайных векторов в $\mathbf{R}^n$, случайных процессов [2], случайных множеств [3].

Ясно, что совокупность распределений $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, порождаемых решениями, лежит в $\mathcal{P}$. Для сравнения различных решений достаточно научиться сравнивать распределения из $\mathcal{P}$ (риски). Для этого оказывается более естественным использовать не отношение порядка, а отношение предпочтения, поскольку существенно различные риски могут оказаться "одинаковыми"с точки зрения их качества в задаче принятия решения.

2.3 Отношение предпочтения

Напомним понятие предпочтения [4].

Определение 2.2 *Говорят, что на множестве* $\mathcal{R}$ *задано отношение предпочтения* $\preceq$, *если это отношение обладает свойствами*

а) полноты: для произвольной пары $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ *выполняется либо* $r_1 \preceq r_2$, *либо* $r_2 \preceq r_1$, *либо справедливы оба этих соотношения;*

б) транзитивности: если $r_1 \preceq r_2$ *и* $r_2 \preceq r_3$, *то* $r_1 \preceq r_3$.

Элементы $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, для которых верно $r_1 \preceq r_2$, $r_2 \preceq r_1$, объявляются эквивалентными: $r_1 \sim r_2$. Нетрудно проверить, что заданное таким образом отношение в действительности является отношением эквивалентности, то есть обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности [4].

Вводится также отношение строгого предпочтения $\prec$, определяемого следующим образом:

$$r_1 \prec r_2 \Longleftrightarrow r_1 \preceq r_2,\ r_2 \npreceq r_1.$$

Часто удобно использовать также имеющие очевидный смысл обозначения $\succeq$ и $\succ$.

2.4 Мера риска

Одним из способов задания отношения предпочтения на множестве рисков $\mathcal{P}$ является введение меры риска: функционала на $\mathcal{P}$.

Определение 2.3 *Мерой риска называется функционал*

$$\mu:\ \mathcal{P} \to \mathbf{R}. \tag{1}$$

Как только определен функционал вида (1), порожденное им отношение предпочтения $\preceq_\mu$ может быть задано одним из следующих способов:

$$P_1 \preceq_\mu P_2 \Longleftrightarrow \mu(P_1) \leq \mu(P_2) \tag{2}$$

или

$$P_1 \preceq_\mu P_2 \Longleftrightarrow \mu(P_1) \geq \mu(P_2) \tag{3}$$

(см. упражнение 4.1).

Применение произвольного функционала μ в задачах принятия решений скорее всего, конечно, приведет к плачевным результатам. "Хорошая"мера риска должна отражать отношение предпочтения индивидуума (или организации), в интересах которого принимается решение. В частности, она должна быть монотонной относительно естественных порядков на множестве рисков $\mathcal{P}$ [4]. Эти проблемы будут подробно освещены в последующих лекциях, здесь же приведем некоторые примеры мер риска для вещественных распределений.

2.4.1 Примеры мер риска

Пусть $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}$, тогда $\mathcal{P}$ представляет собой совокупность функций распределения на $\mathbf{R}$. Древнейшей мерой риска является, по-видимому, математическое ожидание

$$\varepsilon(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x), \quad F \in \mathcal{P}. \tag{4}$$

Эта мера риска, по существу, используется до сих пор, когда решения принимаются на основании средних значений, то есть, неопределенность игнорируется. Если неопределенность состояний среды значительна, такой способ принятия решений приводит к большим, иногда катастрофическим, ошибкам.

Другим примером может служить дисперсия распределения

$$\delta(F) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varepsilon(F))^2\, dF(x), \quad F \in \mathcal{P}. \tag{5}$$

Эта мера риска позволяет уже по существу учитывать неопределенность; на ее основе были построены теории Марковица [5], а также развившая ее CAPM (Capital Asset Pricing Model) Шарпа.

Можно ввести также смесь ε и δ

$$\gamma(F) = \delta(F) - \beta\varepsilon(F), \quad F \in \mathcal{P}, \tag{6}$$

где β – взвешивающий параметр.

В современных приложениях активно используется мера ожидаемой полезности

$$\rho(F) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dF(x), \quad F \in \mathcal{P}, \tag{7}$$

где U – некоторая вещественная функция.

Недавно была предложена перспективная мера возмущенной вероятности [6], [7]

$$\pi(F) = \int_{-\infty}^{0} [g(1 - F(x)) - 1]\, dx + \int_{0}^{\infty} g(1 - F(x))\, dx, \quad F \in \mathcal{P}, \tag{8}$$

где $g:\ [0,1] \to [0,1]$ – функция, обладающая свойствами $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

В приложениях активно используется мера риска ν, называемая VaR (Value at Risk), которая представляет собой квантиль распределения заданного уровня α:

$$\nu(F) = F^{-1}(\alpha). \tag{9}$$

Эта мера риска является частным случаем (8), и получается из последней при выборе

$$g(v) = \begin{cases} 0, & v < 1 - \alpha, \\ 1, & v \geq 1 - \alpha. \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что меры риска ε и δ жестко фиксированы, меры γ и ν обладают некоторой гибкостью: в них можно выбрать значение параметров α и β, а меры риска ρ и π обладают уже значительным запасом гибкости, что позволяет настраивать эти меры риска на определенного инвестора.

3 Типичные приложения теории риска

Рассмотрим теперь некоторые типичные приложения теории риска.

3.1 Портфельный анализ

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайный n-мерный вектор, компоненты которого описывают доход, получаемый от размещения единичного капитала в некоторые инвестиционные инструменты. Задача портфельного анализа заключается в определении наилучшего (в смысле заданного отношения предпочтения) способа распределения единичного капитала между этими инструментами. В предположении линейного характера зависимости дохода от размера инвестированного капитала, доход от составленного портфеля можно записать в виде

$$Y = y_1 X_1 + \ldots + y_n X_n,$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – вектор долей единичного капитала, вложенного в соответствующие компоненты X.

Описанную ситуацию можно формализовать в виде задачи принятия решения следующим образом. Множество состояний среды $\mathcal{S}$ совпадает с $\mathbf{R}^n$ (или некоторой его частью) – совокупностью всевозможных значений вектора X. Структура вероятностного пространства на нем задается борелевской σ-алгеброй и распределением случайного вектора X. Множество решений $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n | \; y_1 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0; \; \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\},$$

то есть является стандартным симплексом $\mathbf{R}^n$. Множество результатов $\mathcal{R}$ лежит в $\mathbf{R}$, каждый риск есть функция распределения F_Y случайной величины Y – дохода портфеля. Отношение предпочтения на $\mathcal{P}$ задается с помощью какой-либо меры риска, а принятие решения есть выбор точки стандартного симплекса $\mathcal{D}$, обеспечивающей экстремальное значение этой меры риска. Поскольку распределение Y зависит от выбора вектора $y \in \mathcal{D}$, значение меры риска на этом распределении также оказывается функцией этого вектора долей: $\mu(F_Y) = f(y)$, поэтому задача оптимизации портфеля записывается в виде

$$f(y) \longrightarrow \max_{y \in \mathcal{D}} \; (\min_{y \in \mathcal{D}}). \tag{11}$$

3.2 Страхование

Типичной задачей в страховании является расчет размера страховой премии при заданном распределении F_Y будущего страхового убытка Y. Решение этой задачи также сводится к выбору некоторой меры риска μ с тем, чтобы вычисление размера страховой премии P производилось по формуле

$$P = \mu(F_Y). \tag{12}$$

Подбор подходящей меры риска μ для решения этой задачи до сих пор является предметом оживленных дискуссий [6], [8]; в последующих лекциях эта проблема будет рассматриваться подробнее.

4 Упражнения

Упражнение 4.1 *Доказать, что (2), (3) в действительности задают отношения предпочтения в смысле определения 2.2.*

Упражнение 4.2 *Для* $a \in \mathbf{R}$ *обозначим* W_a *случайную величину, вырожденную в точке* a*:* $\mathbf{P}\{W_a = a\} = 1$*, а для* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $p \in [0,1]$ *обозначим* $B(a,b,p)$ *бернулллиевскую случайную величину*

$$\mathbf{P}\{B(a,b,p) = a\} = 1 - p, \;\; \mathbf{P}\{B(a,b,p) = b\} = p.$$

Вычислить значения мер риска ε, δ, γ, ρ, π *и* ν *на распределениях этих случайных величин. Уточнить определения квантиля распределения (9) так, чтобы оно годилось для разрывных функций распределения. Используя проведенные вычисления, предложить тип экстремума, который нужно применять с каждой из этих мер риска в задаче оптимизации портфеля (11).*

Упражнение 4.3 *Доказать, что (9) является частным случаем (8), получающимся при задании функции* g *в виде (10).*

Упражнение 4.4 *Показать, что если мера риска* μ *является монотонной относительно порядка* $\leq$*, то порожденное* μ *отношение предпочтения* $\preceq_\mu$ *согласовано [4] с порядком* $\leq$*.*

Список литературы

[1] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* Новосибирск: "Наука". (в печати)

[2] Боровков А.А. (1986) *Теория вероятностей.* М.: "Наука 432 с.

[3] Воробьев О.Ю. (2000) *Случайные конечные абстрактные множества.* Новосибирск.: Наука. (в печати)

[4] Новоселов А.А. (2000) Отношения. *Лекция для студентов КГУ по теории риска.* http://risktheory.novosyolov.com/lectures.htm

[5] Новоселов А.А. (2000) Выбор инвестиционного портфеля. *Лекция для студентов КГУ по теории риска.* http://risktheory.novosyolov.com/lectures.htm

[6] Wang, S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*[1], **26**, pp. 71-92.

[7] Young V.R. (1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.

[8] Buhlmann Hans (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer, Berlin.

[1]Полные тексты статьей из журнала ASTIN Bulletin доступны в интернете в формате PDF по адресу http://www.casact.org/library/astin/