Отношения

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

Вводится понятие отношения на фиксированном множестве, рассматриваются отношения эквивалентности, порядка и предпочтения, и устанавливаются связи между ними.

Содержание

1 Введение

В основе теории риска, как теории принятия решений в условиях вероятностной неопределенности, лежит понятие предпочтения на множестве вероятностных распределений. В настоящей лекции вводится понятие отношения и рассматриваются

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

предпочтение и связанные с ним отношения эквивалентности и порядка. Излагаемые здесь сведения используются в теории риска при изучении связи предпочтений на множестве вероятностных распределений с функционалами, заданными на этом множестве.

2 Отношение

2.1 Определение

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое фиксированное множество.

Определение 2.1 *Отношением Q на множестве $\mathcal{X}$ называется произвольное подмножество декартового произведения $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.*

Говорят, что элементы $x, y \in \mathcal{X}$ находятся в отношении Q, если $(x, y) \in Q$; этот факт записывается также xQy.

2.2 Примеры

Пример 2.1 *Рассмотрим подмножество $I_{\mathcal{X}} = \{(x, x)|\ x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. С помощью такого подмножества задается отношение* равенства. *Для трехэлементного множества $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ это отношение изображено на следующем рисунке; элементы $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, входящие в отношение $I_{\mathcal{X}}$, отмечены кружками.*

	x	y	z
x	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$
y	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$
z	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$

Пример 2.2 *На следующем рисунке изображено отношение на четырехэлементном множестве $\mathcal{X} = \{x, y, z, t\}$, не имеющее специального названия, но, тем не менее, являющееся отношением в смысле определения 2.1.*

	x	y	z	t
x	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$
y	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
z	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
t	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$

2.3 Свойства отношений

Опишем некоторые свойства, которые будут использоваться для аксиоматического задания отношений.

- Полнота. Отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется полным, если для двух произвольных элементов $x, y \in \mathcal{X}$ по крайней мере одна пара (x, y) или (y, x) является элементом Q.

- Симметричность. Отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется симметричным, если $(x, y) \in Q$ влечет $(y, x) \in Q$.

- Транзитивность. Отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется транзитивным, если $(x, y) \in Q,\ (y, z) \in Q$ влечет $(x, z) \in Q$.

- Антисимметричность. Отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется антисимметричным, если $(x, y) \in Q,\ (y, x) \in Q$ влечет $x = y$.

- Рефлексивность. Отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется рефлексивным, если $(x, x) \in Q,\ x \in \mathcal{X}$, или, другими словами, $I_{\mathcal{X}} \subseteq Q$.

Отметим, что полное отношение с необходимостью является рефлексивным (см. упражнение 6.1), и никакие другие взаимосвязи между этими свойствами, вообще говоря, не присутствуют (упражнение 6.2).

3 Виды отношений

В данном параграфе введем некоторые часто используемые отношения.

3.1 Эквивалентность

3.1.1 Определение

Определение 3.1 *Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение Q на множестве $\mathcal{X}$ называется отношением* эквивалентности.

Для отношения эквивалентности часто используется специальное обозначение; факт $(x, y) \in Q$ записывается в виде $x \sim y$. Примером отношения эквивалентности может служить отношение равенства на $\mathcal{X}$:

$$x \sim y \iff x = y.$$

Ввиду рефлексивности любого отношения эквивалентности Q имеем $I_{\mathcal{X}} \subseteq Q$, поэтому отношение равенства является наименьшим (по включению) из всех возможных отношений эквивалентности на $\mathcal{X}$.

Другим примером отношения эквивалентности может служить всеобъемлющее отношение $T_{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, которое, очевидно, является наибольшим (также по включению) из отношений эквивалентности на $\mathcal{X}$: $Q \subseteq T_{\mathcal{X}}$.

3.1.2 Классы эквивалентности

Для фиксированного элемента $x \in \mathcal{X}$ рассмотрим совокупность $K(x)$ всех элементов из $\mathcal{X}$, ему эквивалентных:

$$K(x) = \{y \in \mathcal{X} :\ y \sim x\},$$

и назовем это множество классом эквивалентности элемента x. Понятно, что для произвольного $y \in K(x)$ можно, в свою очередь, построить класс $K(y)$, причем

$K(y) = K(x)$, то есть класс эквивалентности $K(x)$ может быть порожден любым из своих элементов. Если же $z \notin K(x)$, то, очевидно, $K(z)$ и $K(x)$ не могут иметь общих точек (иначе бы нарушалась транзитивность отношения эквивалентности). Поэтому каждая точка $x \in \mathcal{X}$ принадлежит одному и только одному классу эквивалентности, откуда вытекает

Теорема 3.1 *Пусть на множестве $\mathcal{X}$ задано отношение эквивалентности $\sim$. Тогда $\mathcal{X}$ разбивается в объединение непересекающихся множеств*

$$\mathcal{X} = \sum_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda, \tag{1}$$

где каждое множество K_λ представляет собой класс эквивалентности по отношению $\sim$.

Совокупность всех классов эквивалентности называется фактор-множеством $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности $\sim$, и обозначается $\mathcal{X}/\sim = \{K_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Мы будем использовать также более лаконичное обозначение $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/\sim$. Отображение $K : \mathcal{X} \to \widetilde{\mathcal{X}}$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ его класс эквивалентности $K(x)$, будем называть каноническим.

Для отношения равенства $I_{\mathcal{X}}$ классы эквивалентности являются одноточечными: $K(x) = \{x\},\ x \in \mathcal{X}$, так что фактор-множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ по существу совпадает с самим множеством $\mathcal{X}$; разбиение на классы эквивалентности получает при этом наиболее подробным. Для наибольшего отношения эквивалентности $T_{\mathcal{X}}$ имеем единственный класс $K(x) = \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, так что соответствующее разбиение оказывается самым грубым. Все содержательные отношения эквивалентности занимают промежуточное положение между $I_{\mathcal{X}}$ и $T_{\mathcal{X}}$.

Отметим здесь, что отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{X}$ может задано посредством его разбиения. Пусть A_λ, $\lambda \in \Lambda$ – произвольное разбиение множества $\mathcal{X}$ на непустые подмножества ($A_\lambda \neq \emptyset,\ \lambda \in \Lambda$):

$$\mathcal{X} = \sum_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Для $x, y \in \mathcal{X}$ скажем, что $x \sim y$, если найдется $\lambda \in \Lambda$ такое что $x, y \in A_\lambda$. Ясно, что такое отношение в действительности является отношением эквивалентности, причем подмножества A_λ, $\lambda \in \Lambda$ являются его классами эквивалентности (см. упражнение 6.5).

3.1.3 Примеры отношений эквивалентности

Пусть $\mathcal{X}$ – множество целых чисел. Назовем два числа $m, n \in \mathcal{X}$ эквивалентными, если $m - n$ делится на 2. Тогда $\mathcal{X}$ разбивается на два класса эквивалентности: множества четных и нечетных чисел. Более общий пример: для произвольного целого $k \geq 2$ назовем $m, n \in \mathcal{X}$ эквивалентными, если $m - n$ делится на k. Это отношение эквивалентности разбивает $\mathcal{X}$ на k классов эквивалентности K_i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, причем в класс K_i попадают числа вида $jk + i$, $j \in \mathcal{X}$, то есть, целые числа, при делении на k дающие остаток i.

Пусть X – конечное множество, а $\mathcal{X} = 2^X$ – множество всех его подмножеств. Отношение эквивалентности на $\mathcal{X}$ можно ввести следующим образом: для $x, y \in \mathcal{X}$

считаем $x \sim y$ в том и только в том случае, когда их мощности совпадают: $|x| = |y|$. В этом случае каждый класс эквивалентности C_X^k, $k = 0, 1, \ldots, |X|$ состоит из множеств фиксированной мощности k.

3.2 Порядок

Определение 3.2 *Рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение на множестве $\mathcal{X}$ называется отношением (частичного) порядка, и обозначается $\leq$. Если отношение порядка является, кроме того, полным, то порядок называют* линейным.

Наряду с отношением $\leq$ полезно рассматривать также производное отношение $<$, порождаемое по правилу

$$x < y \iff x \leq y,\ y \not\leq x.$$

Примером отношения (линейного) порядка может служить обычный порядок на множестве вещественных чисел. Менее тривиальным примером служит покомпонентный порядок в $\mathbf{R}^n$, который является уже частичным: для $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

На множестве всех подмножеств $\mathcal{X} = 2^X$ фиксированного множества X можно ввести частичный порядок по включению: для $x, y \subseteq X$

$$x \leq y \iff x \subseteq y.$$

В теории риска важную роль играют порядки на множестве распределений. Пусть $\mathcal{F}$ – совокупность всевозможных вещественных функций распределения. Рассмотрим здесь некоторые отношения порядка на $\mathcal{F}$.

Определение 3.3 Стохастическое доминирование. *Говорят, что функция распределения $G \in \mathcal{F}$ стохастически доминирует $F \in \mathcal{F}$: $F \leq_1 G$, если*

$$F(x) \geq G(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Обозначим F_X функцию распределения случайной величины X. Тогда при $a > 0$ распределение $X + a$ стохастически доминирует распределение X:

$$F_X \leq_1 F_{X+a},\ a > 0.$$

Для $a \in \mathbf{R}$ обозначим W_a случайную величину с вырожденным распределением $\mathbf{P}\{W_a = a\} = 1$. Отношение стохастического доминирования на множестве

$$\{F_{W_a},\ a \in \mathbf{R}\}$$

всех вырожденных функций распределения соответствует обычному линейному порядку на $\mathbf{R}$:

$$F_{W_a} \leq_1 F_{W_b} \iff a \leq b.$$

Для вещественных чисел $a < b$ и $p \in [0, 1]$ обозначим $B(a, b, p)$ случайную величину с распределением Бернулли:

$$\mathbf{P}\{B(a, b, p) = a\} = 1 - p,\ \mathbf{P}\{B(a, b, p) = b\} = p,$$

а $F(a,b,p)$ – соответствующую функцию распределения. Тогда (см. рисунок 1)

$$F(a_1,b_1,p_1) \leq_1 F(a_2,b_2,p_2), \quad a_1 \leq a_2,\ b_1 \leq b_2,\ p_1 \leq p_2.$$

Отметим, что если $b_1 \leq a_2$, то отношение $F(a_1,b_1,p_1) \leq_1 F(a_2,b_2,p_2)$ при любых p_1,p_2.

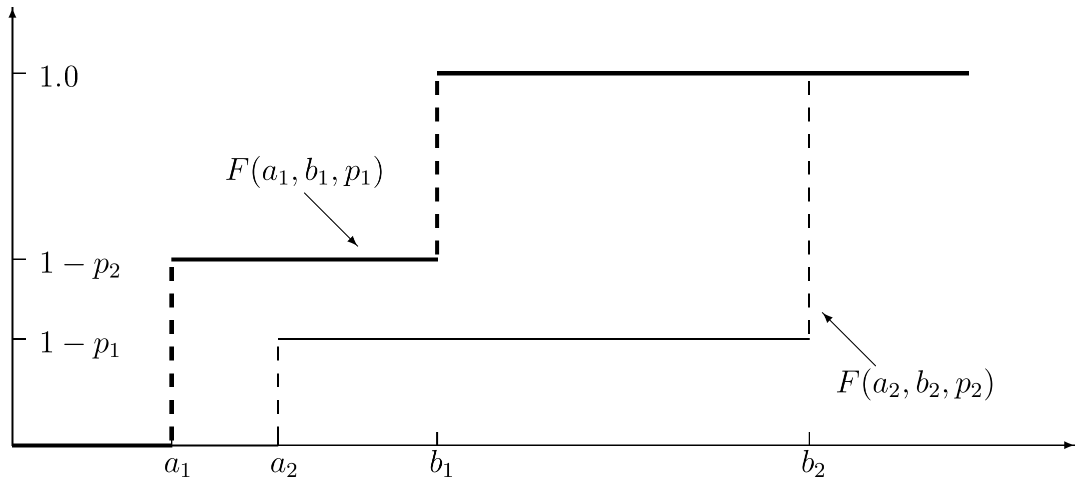

Рис. 1. Стохастическое доминирование распределений Бернулли

3.3 Предпочтение

Определение 3.4 *Полное транзитивное отношение $\preceq$ на множестве $\mathcal{X}$ называется отношением предпочтения.*

На следующем рисунке изображено отношение предпочтения на четырехэлементном множестве $\{x,y,z,t\}$.

	x	y	z	t
x	○	·	·	·
y	○	○	○	·
z	○	○	○	·
t	○	○	○	○

(2)

Представляет интерес связь между порядком и предпочтением, заданным на одном и том же множестве $\mathcal{X}$.

Определение 3.5 *Пусть на $\mathcal{X}$ заданы отношения (частичного) порядка $\leq$ и предпочтения $\preceq$. Предпочтение $\preceq$ называется* согласованным *с порядком $\leq$, если*

$$x \leq y \implies x \preceq y.$$

Так, отношение предпочтения из (2) согласовано с линейным порядком $x \leq y \leq z \leq t$ и любым его подпорядком.

Всякое отношение предпочтения порождает, как показывает следующая лемма, отношение эквивалентности на том же множестве.

Лемма 3.2 *Пусть $\preceq$ – отношение предпочтения на $\mathcal{X}$. Тогда отношение $\sim$, задаваемое правилом*

$$x \sim y \iff x \preceq y,\, y \preceq x, \tag{3}$$

является отношением эквивалентности на $\mathcal{X}$, то есть, симметричным, транзитивным и рефлексивным отношением.

Доказательство леммы предоставляется читателю (упражнение 6.3). $\diamond$

В примере (2) имеем $y \sim z$ (и, конечно же, каждый из элементов x, y, z, t эквивалентен самому себе).

Естественно также рассматривать производное отношение строгого предпочтения $\prec$ на $\mathcal{X}$:

$$x \prec y \iff x \preceq y,\ y \not\preceq x.$$

В примере (2) имеем $x \prec y \sim z \prec t$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ – фактор-пространство $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности (3), а K – каноническое отображение $\mathcal{X}$ в $\widetilde{\mathcal{X}}$. В примере (2) имеем

$$K(x) = \{x\},\ K(y) = K(z) = \{y, z\},\ K(t) = \{t\}.$$

Нетрудно заметить, что отношение предпочтения $\preceq$ порождает на $\widetilde{\mathcal{X}}$ линейный порядок по правилу

$$K(x) \le K(y) \iff x \preceq y,$$

причем

$$K(x) < K(y) \iff x \prec y.$$

В примере (2)

$$K(x) < K(y) = K(z) < K(t).$$

4 Монотонные функционалы

Определение 4.1 *Пусть на множестве $\mathcal{X}$ задан частичный порядок $\le$. Функционал $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется неубывающим, если*

$$x \le y \implies \mu(x) \le \mu(y).$$

Аналогично определяются невозрастающий, возрастающий и убывающий функционалы; все они называются также монотонными (по порядку $\le$).

Определение 4.2 *Пусть на множестве $\mathcal{X}$ задано отношение предпочтения $\preceq$. Функционал $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ называется неубывающим, если*

$$x \preceq y \implies \mu(x) \le \mu(y).$$

Аналогично определяются невозрастающий, возрастающий и убывающий функционалы; все они называются также монотонными (по предпочтению $\preceq$).

Связь между введенными понятиями монотонности устанавливает

Предложение 4.1 *Пусть на множестве $\mathcal{X}$ задан частичный порядок $\le$ и согласованное с ним отношение предпочтения $\preceq$. Тогда всякий функционал $\mu :\ \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, являющийся монотонным в каком-либо смысле по предпочтению $\preceq$, является монотонным в том же смысле по порядку $\le$.*

Доказательство предоставляется читателю (упражнение 6.4).

5 Функциональные обозначения

Введем здесь некоторые обозначения, которые позволят в кратком формальном виде записать свойства отношений, рассмотренные в параграфе 2.3, а также пригодятся в дальнейшем при анализе отношений на множествах вероятностных распределений. В параграфе 2.2 уже было введено обозначение $I_{\mathcal{X}} = \{(x,x),\ x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Назовем множество $I_{\mathcal{X}}$ *диагональю* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Далее, определим *композицию* $S = Q \circ R$ двух отношений Q, R на $\mathcal{X}$, как множество всех точек $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ таких, что найдется хотя бы одно $z \in \mathcal{X}$, при котором $(x,z) \in Q$ и $(z,y) \in R$. Пример композиции отношений на трехточечном множестве $\mathcal{X} = \{x,y,z\}$ приведен на следующем рисунке.

Q				R				S			
	x	y	z		x	y	z		x	y	z
x	$\circ$	$\circ$	$\cdot$	x	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x	$\cdot$	$\circ$	$\circ$
y	$\circ$	$\circ$	$\cdot$	y	$\cdot$	$\circ$	$\circ$	y	$\cdot$	$\circ$	$\circ$
z	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	z	$\cdot$	$\circ$	$\circ$	z	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Отметим, что композицию можно записать в логическом виде, как

$$((x,y) \in S) = \bigcup_{z \in \mathcal{X}} \left([(x,z) \in Q] \cap [(z,y) \in R] \right), \tag{4}$$

где $\cup$ обозначает логическое *или*, а $\cap$ – логическое *и*; по форме (4) напоминает произведение матриц.

Для отношения Q на $\mathcal{X}$ определим *отражение* Q^c следующим образом $Q^c = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} |\ (y,x) \in Q\}$. Множество Q^c можно представлять себе, как отражение Q относительно диагонали $I_{\mathcal{X}}$. Пример отражения приведен на следующем рисунке.

Q				Q^c			
	x	y	z		x	y	z
x	$\circ$	$\cdot$	$\cdot$	x	$\circ$	$\circ$	$\cdot$
y	$\circ$	$\cdot$	$\circ$	y	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
z	$\cdot$	$\cdot$	$\circ$	z	$\cdot$	$\circ$	$\circ$

Используя введенные понятия и обозначения, свойства отношений из параграфа 2.3 можно описать следующим образом: отношение Q на $\mathcal{X}$ является

- *рефлексивным*, если $I_{\mathcal{X}} \subseteq Q$;
- *симметричным*, если $Q = Q^c$;
- *антисимметричным*, если $Q \cap Q^c \subseteq I_{\mathcal{X}}$;
- *транзитивным*, если $Q \circ Q \subseteq Q$;
- *полным*, если $Q \cup Q^c = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

6 Упражнения

Упражнение 6.1 *Доказать, что всякое полное отношение является рефлексивным.*

Упражнение 6.2 *Построить примеры отношений:*

- *являющихся полными, но не являющихся ни симметричными, ни транзитивными, ни антисимметричными;*
- *являющихся симметричными, но не являющихся ни полными, ни транзитивными, ни антисимметричными, ни рефлексивными;*
- *иллюстрирующие отсутствие всех других связей между свойствами отношений, описанных в параграфе 2.3.*

Упражнение 6.3 *Доказать лемму 3.2.*

Упражнение 6.4 *Доказать предложение 4.1, предварительно уточнив слова "в том же смысле"в его формулировке.*

Упражнение 6.5 *Показать, что отношение, введенное в конце раздела 3.1.2, является отношением эквивалентности, а порождающие его множества* A_λ, $\lambda \in \Lambda$ *являются элементами соответствующего фактор-множества.*

Упражнение 6.6 *Записать определение операции композиции из (4) в виде* $S = f(Q, R)$, *используя в операторе* f *только теоретико-множественные операции, и операции, связанные со специфической структурой декартова произведения, например, операции сечения* $Q_{x\cdot} = \{y \in \mathcal{X} | \ (x, y) \in Q\}$ *и* $Q_{\cdot y} = \{x \in \mathcal{X} | \ (x, y) \in Q\}$.