Характеризация нормы единичным шаром

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

Рассматриваются некоторые свойства нормы в линейном нормированном пространстве L и двойственном (сопряженном) пространстве L^*, описана связь нормы и функционала Минковского, доказана теорема о представлении нормы единичным шаром, рассмотрены приложения в $\mathbf{R}^n$. Базовые сведения можно найти также в классической литературе по функциональному анализу [1], [2].

Содержание

1 Понятие нормы

Пусть L — произвольное линейное (векторное) пространство. Напомним, что *нормой* $\|\cdot\|$ в этом пространстве называется функция $\|\cdot\| : L \to \mathbf{R}_+$ с вещественными неотрицательными значениями, обладающая следующими тремя свойствами.

N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

N2) $\|ax\| = |a|\|x\|, \quad x \in L,\ a \in \mathbf{R}$ (положительная однородность);

N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in L$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство L, снабженное нормой $\|\cdot\|$, называется *нормированным пространством.*

Арифметическим пространством $\mathbf{R}^n$ называется совокупность всевозможных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n вещественных чисел: $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. Примерами норм в $\mathbf{R}^n$ служат функции

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

здесь $1 \le p \le \infty$, а под $\|\cdot\|_\infty$ понимается поточечный предел

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,, \quad x \in \mathbf{R}^n\,.$$

Единичным шаром в линейном нормированном пространстве L называется множество

$$B = B_{\|\cdot\|} = \{x \in L:\ \|x\| \le 1\},$$

а *единичной сферой* $S_{\|\cdot\|}$ — граница $B_{\|\cdot\|}$:

$$S = S_{\|\cdot\|} = \{x \in L:\ \|x\| = 1\}.$$

На рис. 1 показаны единичные сферы для норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$, в $\mathbf{R}^2$.

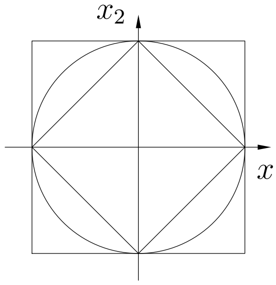


Рис. 1: Единичные сферы в $\mathbf{R}^2$ в нормах $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

2 Функционал Минковского

В линейном пространстве определены *операции Минковского*: сложение множеств $A, B \subseteq L$ и умножение множества A на число λ:

$$A + B = \{x + y:\ x \in A,\, y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x:\ x \in A\}.$$

Напомним, что множество $A \subseteq L$ в линейном пространстве называется *выпуклым*, если $\lambda A + (1-\lambda)A \subseteq A$ при $\lambda \in [0,1]$. Множество A называется *центрально симметричным*, если $-A = A$. *Функционал Минковского* множества A задается выражением

$$f_A(x) = \inf\{r > 0:\ x/r \in A\}, \quad x \in L. \tag{1}$$

Обозначим $R_x^A = \{r > 0 : x/r \in A\}$, так что $f_A(x) = \inf R_x^A$. Если $R_x^A = \emptyset$, то полагаем $\inf R_x^A = \infty$. Обозначим $D(f_A) = \{x \in L:\ f_A(x) < \infty\}$ область определения функционала Минковского и выясним свойства этого функционала.

Лемма 1 *Пусть A — выпуклое множество, а f_A — его функционал Минковского.*

1). Область определения $D(f_A)$ функционала f_A является выпуклым конусом.

2). Функционал f_A является положительно однородным:

$$f_A(\lambda x) = \lambda f_A(x),\ \lambda > 0,\ x \in D(f_A).$$

3). Функционал f_A является субаддитивным:

$$f_A(x+y) \le f_A(x) + f_A(y),\ x, y \in D(f_A).$$

4). Если множество A ограничено ($\|x\| \le M$ при некотором M и всех $x \in A$), то функционал f_A положителен:

$$f_A(x) > 0,\ x \in D(f_A).$$

5). Если множество A замкнуто, то $f_A(x) \in R_x^A$ при всех $x \in D(f_A)$.

6). Если A центрально симметрично, то $f_A(-x) = f_A(x)$, $x \in D(f_A)$.

7). Если начало координат является внутренней точкой множества A, то функционал Минковского f_A определен при всех $x \in L$.

Доказательство. 1), 2), 3). Покажем, что $x \in D(f_A)$ влечет $\lambda x \in D(f_A)$ при всех $\lambda > 0$. Действительно, $R_{\lambda x}^A = \lambda R_x^A$, так что $\inf R_{\lambda x}^A = \inf(\lambda R_x^A) = \lambda \inf R_x^A$, то есть $f_A(\lambda x) = \lambda f_A(x)$, так что $D(f_A)$ является конусом. Отметим, что мы попутно доказали положительную однородность f_A. Для доказательства выпуклости $D(f_A)$ достаточно проверить выполнение включения $x + y \in D(f_A)$ в случае, когда $x, y \in D(f_A)$. Пусть $f_A(x) < \infty$ и $f_A(y) < \infty$. Тогда R_x^A и R_y^A непусты и $f_A(x) = \inf R_x^A$, $f_A(y) = \inf R_y^A$. Для произвольных $r_x \in R_x^A$, $r_y \in R_y^A$ имеем $x/r_x \in A$ и $y/r_y \in A$. Ввиду выпуклости A при произвольном $\lambda \in [0,1]$ имеем $\lambda x/r_x + (1-\lambda)y/r_y \in A$. При $\lambda = r_x/(r_x+r_y) \in (0,1)$ отсюда получаем $(x+y)/(r_x+r_y) \in A$, так что множество R_{x+y}^A непусто, то означает $x + y \in D(f_A)$, так что конус $D(f_A)$ является выпуклым. Отметим, что попутно установлена импликация $r_x \in R_x^A, r_y \in R_y^A \implies r_x + r_y \in R_{x+y}^A$, которая означает $R_x^A + R_y^A \subseteq R_{x+y}^A$. Отсюда имеем $f_A(x+y) = \inf R_{x+y}^A \le \inf(R_x^A + R_y^A) = \inf R_x^A + \inf R_y^A = f_A(x) + f_A(y)$, что означает субаддитивность функционала Минковского.

4). Для произвольного $x \in L$ включение $r \in R_x^A$ означает $x/r \in A$, откуда $\|x/r\| \le M$, то есть, $r \ge \|x\|/M$. Поэтому $\inf R_x^A \ge \|x\|/M > 0$.

5). Утверждение леммы по существу означает $x/f_A(x) \in A$ при всех $x \in D(f_A)$, что, очевидно, справедливо для замкнутого множества A.

6). Для центрально симметричного множества A имеем $R_{-x}^A = R_x^A$ при любом $x \in L$, откуда и вытекает утверждение леммы.

7). Если начало координат является внутренней точкой A, то для произвольного $x \in L$ имеем $x/r \in A$ при всех достаточно больших r, так что множество R_x^A непусто, и, следовательно, $f_A(x) < \infty$. $\diamond$

Лемма 2 *Пусть B — единичный шар в линейном нормированном пространстве L с нормой $\|\cdot\|$. Тогда B является выпуклым замкнутым ограниченным центрально симметричным множеством, а начало координат является внутренней точкой B. Функционалом Минковского для B является норма пространства L: $f_B(\cdot) = \|\cdot\|$.*

Доказательство. Выпуклость B вытекает из неравенства треугольника и положительной однородности нормы: $\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \le \|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| \le \lambda + 1 - \lambda = 1$. Центральная симметрия B является следствием положительной однородности нормы: $\|-x\| = \|x\|$. Ограниченность, замкнутость и свойство начала координат очевидны, а функционал Минковского вычисляется в упражнении 1. $\diamond$

3 Характеризация нормы шаром

Пусть L — линейное пространство. Покажем, что в нем можно ввести норму, задав подходящим образом единичный шар.

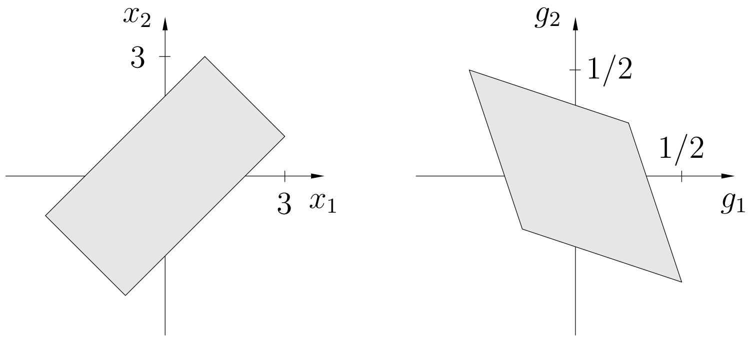
Теорема 1 *Пусть B — выпуклое центрально симметричное множество в линейном пространстве L, и пусть функционал Минковского f_B множества B принимает конечные положительные значения при всяком $x \in L$, $x \neq 0$. Тогда функционал Минковского f_B задает в L норму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$, в которой B является единичным шаром.*

Замечание 1 Теорема 1 по существу означает, что для задания нормы в линейном пространстве достаточно задать единичный шар для этой нормы. В некоторых случай такой способ задания оказывается проще функционального.

Доказательство. Прежде всего отметим, что рассматриваемый функционал Минковского f_B задан на всем L, то есть $D(f_B) = L$, и $f_B(0) = 0$. Для доказательства теоремы осталось проверить, что f_B обладает свойствами нормы N1, N2, N3. Первое свойство непосредственно вытекает из условий теоремы. Второе свойство является следствием положительной однородности функционала Минковского и его симметричности для центрально симметричных множеств (свойства 2, 6 из леммы 1). Неравенство треугольника для f_B, по существу, — субаддитивность функционала, которой f_B обладает по лемме 1 (свойство 3). Теорема доказана. $\diamond$

4 Примеры

Рассмотрим пример нормы в $\mathbf{R}^2$, порожденной единичным шаром по теореме 1, не принадлежащей классу норм $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть B является прямоугольником с вершинами в точках $(1,3)$, $(3,1)$, $(-1,-3)$, $(-3,-1)$, изображенным на рис. 2.а. Представление соответствующей нормы (то есть, функционала Минковского для



а) единичный шар B б) единичный шар B^*

Рис. 2: Нетрадиционная норма в $\mathbf{R}^2$

"единичного шара" B) предоставляется читателю, см. упражнение 2.

В двойственном (сопряженном) пространстве L^* линейных непрерывных функционалов норму функционала g, как обычно, можно задать посредством

$$\|g\|_* = \sup_{\|x\|=1} |g(x)|.$$

В нашем случае двойственное пространство изоморфно $\mathbf{R}^2$, а единичный шар B^* в этой норме показан на рис. 2.б; он представляет собой четырехугольник с вершинами в точках $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Обоснование этого факта предоставляется читателю, см. упражнение 3.

5 Упражнения

Упражнение 1 Доказать, что норма является функционалом Минковского единичного шара линейного нормированного пространства (см. лемму 2).

Упражнение 2 Вывести формальное представление нормы (функционала Минковского) для единичного шара B, описанного в параграфе 4.

Упражнение 3 Построить единичный шар B^* в двойственном пространстве в примере параграфа 4.

Список литературы

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. (1977) *Функциональный анализ.* М.: Наука, 744 с.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. (1968) *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука.