Выбор инвестиционного портфеля

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Содержание

1 Введение

Одной из важнейших проблем теории риска является проблема оптимального распределения ограниченных ресурсов (например, капитала). Примерами приложений могут служить формирование инвестиционного портфеля, территориальное распределение производства.

Пусть $(X_1, ..., X_n)$ – фиксированный случайный вектор, $m = (m_1, ..., m_n)$ – вектор его средних значений, а $V = (v_{ij})$ – ковариационная матрица, то есть

$$m_i = \mathbf{E}X_i, \;\; v_{ij} = \mathbf{E}(X_i - m_i)(X_j - m_j), \;\; i, j = 1, ..., n. \tag{1}$$

Пусть, далее, $y = (y_1, ..., y_n)$ – вектор из

$$L_n = \{y \in \mathbf{R}^n | \; y_1 + ... + y_n = 1\}. \tag{2}$$

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

Портфелем называется случайная величина

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(y) = y_1 X_1 + ... + y_n X_n, \tag{3}$$

при этом компоненты вектора y принято называть весами инструментов X_i, $i = 1, ..., n$ в портфеле. Математическое ожидание и дисперсия портфеля (3), как нетрудно заметить, равны (см. упражнение (5.1))

$$\mathbf{E}\mathcal{P} = y_1 m_1 + ... + y_n m_n = y^T m, \ \ \mathbf{D}\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_{ij} y_i y_j = y^T V y, \tag{4}$$

где верхний индекс T обозначает транспонирование.

Задача формирования портфеля заключается в выборе весов y наилучшим в некотором смысле образом.

Для сравнения случайных величин (точнее, их распределений) вводится мера риска μ, то есть отображение из некоторого множества случайных величин $\mathcal{X}$ (или множества их распределений $\mathcal{F}$) в вещественную прямую:

$$\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{R}, \ \ (\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}).$$

Мера риска портфеля $\mathcal{P}$ оказывается при этом функцией весового вектора y:

$$\mu(\mathcal{P}) = \mu(y_1 X_1 + ... + y_n X_n) = f(y),$$

поэтому задача выбора портфеля формулируется следующим образом:

$$f(y) \to \max_y (\min_y) \tag{5}$$

при условии

$$y \in L_n \tag{6}$$

и, возможно, дополнительных ограничениях, связанных с существом каждой конкретной задачи.

Обозначим $I = (1, 1, ..., 1)^T$, тогда множество L_n можно задать равенством

$$L_n = \{ y \in \mathbf{R}^n | \ y^T I = 1 \}. \tag{7}$$

Всюду далее будем считать ковариационную матрицу V невырожденной; при этом как V, так и V^{-1} являются положительно определенными, что позволяет задать в $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение

$$(u, v) = u^T V^{-1} v, \ \ u, v \in \mathbf{R}^n \tag{8}$$

и норму $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, которую иногда называют энергетической. В некоторых случаях веса портфеля должны быть неотрицательными, в связи с чем задача оптимизации (5) рассматривается не на всем множестве L_n (6), а на его подмножестве

$$\mathbf{S}_n = \{ y \in L_n | \ y_1 \geq 0, ..., y_n \geq 0 \}, \tag{9}$$

называемом стандартным симплексом в $\mathbf{R}^n$.

2 Простейший портфель

На множестве $\mathcal{X}$ случайных величин, обладающих конечным вторым моментом: $\mathbf{E}X^2 < \infty$ в качестве меры риска можно выбрать дисперсию случайной величины:

$$\mu(X) = \mathbf{D}X,\ X \in \mathcal{X}. \tag{10}$$

Обозначив D_F дисперсию случайной величины, имеющей функцию распределения F, эту меру риска можно задать на множестве распределений $\mathcal{F}$, обладающих конечным вторым моментом

$$\mu(F) = D_F,\ F \in \mathcal{F}. \tag{11}$$

Дисперсию, как меру риска, следует минимизировать, поэтому задача (5), (6) преобразуется к виду

$$y^T V y \to \min_y, \tag{12}$$

$$y^T I = 1. \tag{13}$$

Решим эту задачу методом множителей Лагранжа [2]. Для этого составим функцию Лагранжа задачи (5), (6)

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = y^T V y + \lambda(y^T I - 1),$$

и найдем ее частные производные

$$\mathcal{L}_y = 2Vy + \lambda I,$$
$$\mathcal{L}_\lambda = y^T I - 1.$$

Приравнивая эти производные к 0, из первого уравнения получаем

$$y = -\frac{1}{2}\lambda V^{-1} I,$$

подставляем отсюда y во второе уравнение, находим $\lambda = -2/\|I\|^2$, так что решением задачи (12), (13) является вектор

$$y^* = \frac{V^{-1} I}{\|I\|^2}. \tag{14}$$

Отметим, что значения ожидаемой доходности и дисперсии портфеля на оптимальном y^* равны

$$\mathbf{E}\mathcal{P}(y^*) = y^{*T} m = \frac{(m, I)}{\|I\|^2}, \quad f(y^*) = \frac{1}{\|I\|^2}. \tag{15}$$

В качестве иллюстрации выпишем решение этой задачи для случая некоррелированных инструментов (компонент вектора X). При этом ковариационная матрица V является диагональной: $V = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$, так что $V^{-1} = diag(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_n^{-2})$, $\|I\|^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}$ и

$$y_i^* = \frac{\sigma_i^{-2}}{\sigma_1^{-2} + ... + \sigma_n^{-2}},\ \ i = 1, 2, ..., n, \quad f(y^*) = \frac{1}{\sigma_1^{-2} + ... + \sigma_n^{-2}}.$$

В частности, если $\sigma_1 = ... = \sigma_n = \sigma$, то

$$y_i^* = \frac{1}{n},\ i = 1, ..., n, \quad f(y^*) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

3 Разрешение противоречия "доходность–риск"

В рамках парадигмы "доходность–риск"предполагается, что инвестор стремится увеличить, насколько это возможно, ожидаемую доходность портфеля (в наших обозначениях – $\mathbf{E}\mathcal{P}$), одновременно сводя к минимуму "риск"$\mathbf{D}\mathcal{P}$. Далее рассмотрим вкратце общую постановку таких векторных задач оптимизации и подходы к их решению, а потом опишем подробнее два таких подхода в задаче портфельной оптимизации.

3.1 Векторная оптимизация

Пусть $g_1, ..., g_m$ – некоторые функции, заданные на множестве $D \in \mathbf{R}^n$, и принимающие значения в $\mathbf{R}$. Задача

$$g_1(y) \to \min_y,$$
$$...$$
$$g_m(y) \to \min_y,$$
$$y \in D$$

называется задачей векторной (многокритериальной) оптимизации. Поскольку точки y, на которых достигаются минимумы различных функций g_i, $i = 1, ..., m$, как правило, различны, само понятие решения задачи требует определения. Не вдаваясь в подробное рассмотрение этой проблемы, рассмотрим два подхода к ее разрешению.

Один из подходов заключается в следующем: значения всех целевых функций, кроме одной, например, первой, фиксируются, и вместо исходной рассматривается обычная задача минимизации с дополнительными ограничениями

$$g_1(y) \to \min_y,$$
$$g_2(y) = a_2,$$
$$...$$
$$g_m(y) = a_m,$$
$$y \in D,$$

зависимость решения которой от параметров $a_2, ..., a_m$ затем исследуется дополнительно.

Другой подход заключается в присваивании критериальным функциям положительных весов $\alpha_1, ..., \alpha_m$ (один из которых, например, α_m всегда можно выбрать равным 1), и решается задача оптимизации со взвешенным скалярным критерием

$$g(y) = \alpha_1 g_1(y) + ... + \alpha_{m-1} g_{m-1}(y) + g_m(y) \to \min_y,$$
$$y \in D.$$

Рассмотрим оба эти подхода применительно к проблеме выбора оптимального (в смысле ожидаемой доходности и дисперсии) портфеля, в которой $g_1(y) = y^T V y$, $g_2(y) = -y^T m$ и $D = L_n$.

3.2 Задача Марковица

В [4] используется первый из описанных подходов: ожидаемая доходность портфеля $y^T m$ фиксируется на некотором уровне M, и решается задача минимизации дисперсии портфеля $y^T V y$. При этом возникает задача, похожая на (12)–(13), с одним дополнительным ограничением:

$$y^T V y \to \min_y, \tag{16}$$
$$y^T I = 1, \tag{17}$$
$$y^T m = M, \tag{18}$$

где M – параметр задачи. Решая (16)–(18) методом множителей Лагранжа (см. упражнение (5.2)), получаем:

$$y^*(M) = uM + v, \tag{19}$$

где

$$u = V^{-1}\,\frac{m\|I\|^2 - I(m,I)}{\Delta}, \quad v = V^{-1}\,\frac{I\|m\|^2 - m(m,I)}{\Delta}$$

и

$$\Delta = \|I\|^2\|m\|^2 - (m,I)^2.$$

Видно, что зависимость решения y^* от параметра задачи M линейна. Вычисляя дисперсию портфеля на оптимальном векторе (19), получаем

$$\sigma^2 = f(y^*(M)) = \mathbf{D}\mathcal{P}(y^*(M)) = \frac{\|I\|^2M^2 - 2(m,I)M + \|m\|^2}{\Delta}, \tag{20}$$

так что зависимость оптимального "риска"от ожидаемой доходности квадратична. Минимальное значение в (20) достигается при $M^* = (m,I)/\|I\|^2$ и равно $1/\|I\|^2$ (см. упражнение (5.3)). Интересно отметить, что оптимальный вектор долей y^*, соответствующий M^*, имеет вид $y^*(M^*) = V^{-1}I/\|I\|^2$, что совпадает с решением задачи (12)–(13). Отметим также, что $I^T u = 0$, $I^T v = 1$, то есть вектор v лежит в гиперплоскости L_n (7), а вектор u параллелен этой гиперплоскости.

Множество точек плоскости (σ^2, M), связанных соотношением (20) при $M \geq M^*$, обычно называется эффективной границей [5]. Точки этого множества соответствуют портфелям, обладающим минимальной дисперсией σ^2 при заданной ожидаемой доходности M, или, что в данном случае эквивалентно, максимальной ожидаемой доходностью M при заданной дисперсии σ^2. Отметим, что на эффективной границе σ^2 является строго возрастающей функцией от M: "чем больше доходность, тем больше риск".

Интересно представить себе, что такое M^* – доходность, соответствующая минимальной достижимой дисперсии портфеля. Рассмотрим сначала частный случай, когда $V = E$ совпадает с единичной матрицей (все инструменты некоррелированы и имеют единичные дисперсии). При этом $V^{-1} = E$, так что $\|I\|^2 = n$, $(m,I) = m_1 + \ldots + m_n$, и

$$M^* = \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}$$

является просто средним арифметическим доходностей инструментов.

Пусть теперь матрица V – диагональная, то есть, инструменты по-прежнему некоррелированы, но имеют, вообще говоря, различные дисперсии σ_i^2, $i = 1, \dots, n$. При этом матрица V^{-1} также является диагональной с элементами σ_i^{-2}, $i = 1, \dots, n$ на главной диагонали, поэтому имеем

$$M^* = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} m_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}},$$

то есть, M^* является выпуклой комбинацией чисел $m_1, \dots, m_n$ с коэффициентами

$$\frac{\sigma_k^{-2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}} > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

в частности, заведомо $\min\{m_1, \dots, m_n\} \le M^* \le \max\{m_1, \dots, m_n\}$.

Можно предположить, что и в общем случае M^* является взвешенным средним или выпуклой комбинацией доходностей инструментов; первое предположение действительно выполняется, однако веса могут оказаться отрицательными, вследствие чего комбинация будет невыпуклой, и, в частности, возможны случаи

$$M^* < \min\{m_1, \dots, m_n\}, \quad M^* > \max\{m_1, \dots, m_n\}.$$

Приведем соответствующие примеры. Пусть $n = 3$,

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда $y^*(M^*) = V^{-1}I/\|I\|^2 = (-2/15, 2/3, 7/15)^T$, и при векторе доходностей $m = (1, 2, 2.1)^T$ получаем $M^* = 2.18 > \max\{m_1, m_2, m_3\} = 2.1$, а при $m = (2, 1, 1)^T$ выполняется $M^* = (13/15) < \min\{m_1, m_2, m_3\} = 1$.

3.3 Взвешенный критерий

Рассмотрим теперь прием одновременной оптимизации ожидаемой доходности и дисперсии сворачиванием векторного критерия в скалярный. Пусть $\alpha > 0$ – взвешивающий параметр, тогда можно рассмотреть следующую задачу:

$$g(y) = \frac{1}{2}\alpha y^T V y - y^T m \to \min_y, \tag{21}$$

$$y^T I = 1. \tag{22}$$

Решение ее методом множителей Лагранжа (см. упражнение (5.4)) дает

$$y^* = y^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha} V^{-1} \left[m - \frac{(m, I)}{\|I\|^2} I \right] + \frac{V^{-1} I}{\|I\|^2} \tag{23}$$

$$g(y^*) = \frac{\alpha - (m, I)}{\|I\|^2}, \tag{24}$$

причем ожидаемая доходность и дисперсия оптимального портфеля принимают значения

$$\mathbf{E}\mathcal{P}(y^*) = y^{*T}m = \frac{\Delta}{\alpha\|I\|^2} + \frac{(m,I)}{\|I\|^2}, \tag{25}$$

$$\mathbf{D}\mathcal{P}(y^*) = y^{*T}Vy^* = \frac{\Delta}{\alpha^2\|I\|^2} + \frac{1}{\|I\|^2}. \tag{26}$$

Исследуем поведение решения этой задачи при изменении параметра α на $(0,\infty)$. Из (25) и (26) ясно, что ожидаемая доходность и дисперсия оптимального портфеля являются строго убывающими функциями α, и

$$\lim_{\alpha\to\infty} y^*(\alpha) = \frac{V^{-1}I}{\|I\|^2}, \quad \lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{E}\mathcal{P}(y^*(\alpha)) = \frac{(m,I)}{\|I\|^2}, \quad \lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{D}\mathcal{P}(y^*(\alpha)) = \frac{1}{\|I\|^2},$$

то есть предельное решение совпадает с (14), (15).

3.4 Отношение к риску

Параметр M задачи Марковица (16)–(18) может служить индикатором отношения инвестора к риску: более рискованный инвестор склонен задать большее значение ожидаемой доходности M, принимая на себя больший "риск"σ^2. В задаче (21)–(22) аналогичную роль играет параметр α: меньшие его значения приводят к большей ожидаемой доходности и большей дисперсии портфеля. В действительности между этими параметрами существует еще более тесная связь, а именно, решения задач (16)–(18) и (21)–(22) со значениями параметров M и α, связанных соотношением

$$M = M(\alpha) = \frac{\Delta}{\alpha\|I\|^2} + \frac{(m,I)}{\|I\|^2}, \quad \alpha > 0, \tag{27}$$

или обратным соотношением

$$\alpha = \alpha(M) = \frac{\Delta}{M\|I\|^2 - (m,I)}, \quad M > M^* = \frac{(m,I)}{\|I\|^2}, \tag{28}$$

приводят к одинаковым портфелям (см. упражнение 5.5).

4 Метод ожидаемой полезности

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим теперь другой подход к выбору оптимального портфеля, основанный на теории полезности [6]. Пусть $U: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неубывающая вогнутая функция. С ее помощью можно задать следующую меру риска:

$$\rho(X) = \mathbf{E}U(X), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{29}$$

которая называется ожидаемой полезностью риска X.

Ожидаемая полезность портфеля (3) имеет вид

$$g(y) = \mathbf{E}U(\mathcal{P}) = \mathbf{E}U\left(y_1X_1 + ... + y_nX_n\right).$$

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля

$$g(y) \to \max_y, \tag{30}$$

$$y \in L_n. \tag{31}$$

Функционал ρ является вогнутым по значению, откуда вытекает вогнутость g, как функции y на L_n [7], поэтому (30), (31) является задачей выпуклого программирования, и может быть решена имеющимися численными методами.

Мы рассмотрим здесь частный случай, в котором удается получить решение аналитически, и сравним полученное решение с уже имеющимися результатами.

4.2 Показательная полезность и отношение к риску

В [8] введено понятие цены риска $\pi(X)$, как решения уравнения

$$U(\mathbf{E}X - \pi(X)) = \mathbf{E}U(X),$$

и для гладкой функции полезности U определяется понятие неприятия риска:

$$a(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}, \ \ x \in \mathbf{R},$$

Там же показано, что более рискованный инвестор (имеющий меньшую функцию неприятия риска) согласен принять любой риск за меньшую цену. Точнее, если два инвестора имеют функции полезности U_1, U_2, по которым вычисляются функции неприятия риска a_1, a_2 и цены риска π_1, π_2, соответственно, то

$$a_1(x) \le a_2(x), \ x \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow \pi_1(X) \le \pi_2(X), \ X \in \mathcal{X}.$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться в том, что для показательной функции полезности

$$U(x) = 1 - \exp(-\alpha x), \ x \in \mathbf{R}, \tag{32}$$

где $\alpha > 0$ – параметр, функция неприятия риска постоянна

$$a(x) = \alpha, \ \ x \in \mathbf{R}. \tag{33}$$

4.3 Нормальное распределение и показательная полезность

Пусть совместное распределение вектора инструментов $X = (X_1, ..., X_n)$ является нормальным. Тогда [9] распределение портфеля $\mathcal{P}(y)$ также является нормальным с параметрами $\nu = y^T m$ и $\sigma^2 = y^T V y$ и плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{34}$$

Предположим, далее, что функция полезности U показательна, то есть задается выражением (32). Тогда ожидаемая полезность может быть вычислена явно:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}U(\mathcal{P}(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(-\alpha x) f(x)\,dx \\ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x) \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right)\,dx.\end{aligned}$$

Поскольку подинтегральное выражение равно (см. упражнение (5.6))

$$\exp\left(-\frac{(x-(\nu-\alpha\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2-\alpha\nu\right), \tag{35}$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}U(\mathcal{P}(y)) &= 1-\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2-\alpha\nu\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-(\nu-\alpha\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)dx \\ &= 1-\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2-\alpha\nu\right) = 1-\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 y^T V y-\alpha y^T m\right),\end{aligned}$$

откуда видно, что максимизация $\mathbf{E}U(\mathcal{P}(y))$ эквивалентна минимизации функции

$$g(y)=\frac{1}{2}\alpha y^T V y - y^T m \tag{36}$$

при условии $y \in L_n$, что совпадает с задачей (21)–(22). Таким образом, максимизация показательной ожидаемой полезности при нормальном распределении инструментов дает такой же портфель, как и метод взвешенного критерия. Отметим также, что параметр неприятия риска α в этой задаче совпадает по смыслу с аналогичным параметром задачи (21)–(22).

5 Упражнения

Упражнение 5.1 *Вычислить среднее значение и дисперсию (4) портфеля (3) по заданным характеристикам m, V инвестиционных инструментов.*

Упражнение 5.2 *Решить задачу Марковица (16)–(18) методом множителей Лагранжа.*

Упражнение 5.3 *Вычислить точку минимума и минимальное значение дисперсии на эффективной границе задачи Марковица (20).*

Упражнение 5.4 *Решить задачу (21), (22) методом множителей Лагранжа; вычислить ожидаемую доходность (25) и дисперсию портфеля (26) на решении.*

Упражнение 5.5 *Доказать, что если параметры M и α задач (16)–(18) и (21)–(22), соответственно, связаны соотношениями (27), (28), то эти задачи имеют одинаковые решения.*

Упражнение 5.6 *Вывести формулу (35).*

Список литературы

[1] В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **1,2**, М.: Мир, 1984.

[2] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. (1974) *Теория экстремальных задач.* М.: "Наука 480 с.

[3] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд-во иностр. литер.

[4] Markowitz H. (1952) *Portfolio selection.*– Journal of Finance, 1952, March, p. 77–91.

[5] Markowitz H. (1990) *Mean – Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Cambridge, Massachusetts: Blackwell.

[6] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[7] Новоселов А.А. (2000) О свойствах монотонности и выпуклости некоторых мер риска. В кн.: *Статистическая метафизика*, Красноярск, ИВМ СО РАН, с. 66–81.

[8] Pratt J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.

[9] Ширяев А.Н. (1989) *Вероятность.* М.: Наука, 640с.