Мера возмущенной вероятности

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

Рассматривается мера возмущенной вероятности, исследуются ее свойства, приводятся методы вычисления и статистического оценивания.

Содержание

1 Введение и обозначения

Одной из основных задач теории риска является построение меры риска, монотонной относительно предпочтения на множестве вероятностных распределений [1]. Здесь рассматривается класс мер риска, введенный в [2], [3], и исследуются некоторые свойства элементов этого класса. Мера возмущенной вероятности первоначально предназначалась для вычисления страховой премии, но может быть использована и в более широком классе задач, включая портфельный анализ.

Обозначим $\mathcal{X}$ множество всех вещественных случайных величин, а $\mathcal{X}_+$ – множество неотрицательных случайных величин:

$$\mathcal{X}_+ = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbf{P}\{X \geq 0\} = 1\}.$$

Введем также специальные обозначения для множеств случайных величин, обладающих конечным математическим ожиданием:

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{X \in \mathcal{X} :\ \mathbf{E}|X| < \infty\},\ \ \widetilde{\mathcal{X}}_+ = \{X \in \mathcal{X}_+ :\ \mathbf{E}|X| < \infty\}.$$

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

Пусть, далее, $F_X(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}$, $x \in \mathbf{R}$ есть функция распределения случайной величины $X \in \mathcal{X}$, а $S_X(x) = \mathbf{P}\{X > x\} = 1 - F_X(x)$, $x \in \mathbf{R}$ – ее дополнительная функция распределения.

Пусть $g : [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая функция, причем $g(0) = 0, g(1) = 1$. Обозначим класс всех таких функций $\mathcal{G}$. Нетрудно заметить, что всякой $g \in \mathcal{G}$ соответствует двойственная функция $\widetilde{g} \in \mathcal{G}$, определенная равенством

$$\widetilde{g}(x) = 1 - g(1-x),\ x \in [0,1]. \tag{1}$$

Ясно также, что $\widetilde{\widetilde{g}} = g$.

В [2] была введена мера риска

$$\pi_g(X) = \pi(X) = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt, \quad X \in \mathcal{X}_+, \tag{2}$$

а в [3] предложена модификация (2) для распределений на всей вещественной оси $\mathbf{R}$

$$\pi_g(X) = \pi(X) = \int_{-\infty}^0 [g(S_X(t)) - 1]\,dt + \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt, \quad X \in \mathcal{X}. \tag{3}$$

Отметим, что меры риска (2) и (3) зависят только от распределения S_X случайной величины X.

Обозначим еще $\mathcal{X}_g$ класс случайных величин, для которых значение меры риска (3) при данной функции g конечно:

$$\mathcal{X}_g = \{X \in \mathcal{X} |\ |\pi_g(X)| < \infty\}, \tag{4}$$

а $\widetilde{\pi}$ – двойственную меру риска, определяемую как

$$\widetilde{\pi}_g(X) = \pi_{\widetilde{g}}(X), \quad X \in \mathcal{X}_{\widetilde{g}}. \tag{5}$$

2 Представления математического ожидания

В данном параграфе выведем два полезных представления для математического ожидания.

Лемма 2.1 *Для $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ справедливо представление*

$$\mathbf{E}X = -\int_{-\infty}^0 F_X(t)\,dt + \int_0^\infty (1 - F_X(t))\,dt. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^\infty t\,dF_X(t) = \int_{-\infty}^0 t\,dF_X(t) + \int_0^\infty t\,dF_X(t). \tag{7}$$

Рассмотрим случай $|\mathbf{E}X| < \infty$, в частности, оба интеграла в (7) конечны (доказательство для случая $\mathbf{E}|X| = \infty$ предоставляется читателю, см. упр. 5.1). При этом их хвосты являются бесконечно малыми:

$$\lim_{A\to-\infty} \int_{-\infty}^A t\,dF_X(t) = 0, \quad \lim_{B\to\infty} \int_B^\infty t\,dF_X(t) = 0. \tag{8}$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{A} t\,dF_X(t) \le A\int_{-\infty}^{A} dF_X(t) = AF(A) \le 0$$

и

$$\int_{B}^{\infty} t\,dF_X(t) \ge B\int_{B}^{\infty} dF_X(t) = B(1-F(B)) \ge 0,$$

что вместе с (8) дает

$$\lim_{A\to-\infty} AF(A) = 0, \quad \lim_{B\to\infty} B(1-F(B)) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{0} t\,dF_X(t) = tF_X(t)|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt$$
$$= -\lim_{t\to-\infty} tF_X(t) - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt \tag{9}$$

и

$$\int_{0}^{\infty} t\,dF_X(t) = -\int_{0}^{\infty} t\,d(1-F_X(t)) = -t(1-F_X(t))|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}(1-F_X(t))\,dt$$
$$= -\lim_{t\to\infty} t(1-F_X(t)) + \int_0^{\infty}(1-F_X(t))\,dt = \int_0^{\infty}(1-F_X(t))\,dt \tag{10}$$

Подставив (9), (10) в (7), приходим к утверждению леммы. $\diamond$

Лемма 2.2 *Для* $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ *справедливо представление*

$$\mathbf{E}X = \int_0^1 S_X^{-1}(v)\,dv. \tag{11}$$

Доказательство. С помощью замены переменных $v = S_X(t)$ и интегрирования по частям имеем

$$-\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (S_X(t)-1)\,dt = \int_1^{S(0)} (v-1)\,dS_X^{-1}(v)$$
$$= (v-1)S_X^{-1}(v)|_1^{S(0)} - \int_1^{S(0)} S_X^{-1}(v)\,dv = \int_{S(0)}^1 S_X^{-1}(v)\,dv \tag{12}$$

и

$$\int_0^{\infty}(1-F_X(t))\,dt = \int_0^{\infty} S_X(t)\,dt = \int_{S(0)}^{0} v\,dS_X^{-1}(v)$$
$$= vS_X^{-1}(v)|_{S(0)}^{0} - \int_{S(0)}^{0} S_X^{-1}(v)\,dv = \int_0^{S(0)} S_X^{-1}(v)\,dv. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (6), приходим к утверждению леммы. $\diamond$

3 Свойства меры возмущенной вероятности

Предложение 3.1 *Если* $g(t) \equiv t$, *то* $\pi(X) = \mathbf{E}X$.

Доказательство. Действительно, в условиях леммы мера риска π имеет вид

$$\pi(X) = \int_{-\infty}^{0} (S_X(t) - 1)\, dt + \int_{0}^{\infty} S_X(t)\, dt,$$

что по лемме 2.1 совпадает с $\mathbf{E}X$. $\diamond$

Рассмотрим условия существования интеграла в (3).

Предложение 3.2 $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_g$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < g'(0) < \infty, \;\; 0 < g'(1) < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть выполнено (14). Покажем, что $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ влечет $X \in \mathcal{X}_g$. Из условия $g'(0) < \infty$ вытекает существование $0 < M < \infty$ и $\delta \in (0,1)$ таких, что $g(x) \le Mx$ при $x \in [0, \delta]$. Выберем $B \in (0, \infty)$ так, что $S_X(t) \le \delta$ при $t \ge B$. Тогда

$$\int_{0}^{\infty} g(S_X(t))\, dt = \int_{0}^{B} g(S_X(t))\, dt + \int_{B}^{\infty} g(S_X(t))\, dt \le B + M \int_{B}^{\infty} S_X(t)\, dt.$$

Ввиду существования $\mathbf{E}X$ интеграл в правой части этого неравенства конечен, так что

$$0 \le \int_{0}^{\infty} g(S_X(t))\, dt < \infty. \tag{15}$$

Далее, из $g'(1) < \infty$ вытекает существование $0 < M < \infty$ и $\delta \in (0,1)$ таких, что $g(x) \ge 1 - Mx$ при $x \in [\delta, 1]$. Выберем $A \in (-\infty, 0)$ так, чтобы $S_X(t) \ge \delta$ при $t \le A$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{0} [g(S_X(t)) - 1]\, dt = \int_{-\infty}^{A} [g(S_X(t)) - 1]\, dt + \int_{A}^{0} [g(S_X(t)) - 1]\, dt \ge -M \int_{-\infty}^{A} S_X(t)\, dt + A.$$

Здесь интеграл в правой части также конечен ввиду существования $\mathbf{E}X$, поэтому

$$0 \ge \int_{-\infty}^{0} [g(S_X(t)) - 1]\, dt > -\infty. \tag{16}$$

Используя (15), (16) в (3), приходим к выводу, что $|\pi(X)| < \infty$, то есть $X \in \mathcal{X}_g$. Импликация $X \in \mathcal{X}_g \Longrightarrow X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ вытекает аналогично из $g'(0) > 0$ и $g'(1) > 0$.

Таким образом, показано, что при выполнении (14) классы $\widetilde{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}_g$ совпадают. Для иллюстрации обратного приведем примеры распределений, показывающие различие этих классов при нарушении хотя бы одного из условий в (14).

Пусть $g(x) = x^2, \; x \in [0,1]$. Ясно, что $g'(0) = 0$. Рассмотрим случайную величину X с дополнительной функцией распределения

$$S_X(t) = \begin{cases} (1+t)^{-1}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При этом

$$\pi(X) = \int_{0}^{\infty} S_X^2(t)\, dt = 1,$$

тогда как математическое ожидание X, очевидно, бесконечно, так что $X \in \mathcal{X}_g$, $X \notin \widetilde{\mathcal{X}}$. Другие варианты несовпадения $\widetilde{\mathcal{X}}$ с $\mathcal{X}_g$ читателю предлагается рассмотреть самостоятельно (упражнения 5.2, 5.3). $\diamond$

Для $b \in \mathbf{R}$ обозначим W_b вырожденную случайную величину: $\mathbf{P}\{W_b = b\} = 1$, и рассмотрим некоторые элементарные свойства π.

Предложение 3.3 *Мера риска π обладает следующими свойствами:*

1. $\pi(W_b) = b,\ b \in \mathbf{R}$;
2. $\pi(X + b) = \pi(X) + b,\ b \in \mathbf{R},\ X \in \mathcal{X}_g$;
3. $\pi(aX) = a\pi(X),\ a \geq 0,\ X \in \mathcal{X}_g$;
4. $\pi_g(aX) = a\pi_{\widetilde{g}}(X),\ a < 0,\ X \in \mathcal{X}_g$, *где* $\widetilde{g}(x) = 1 - g(1 - x)$, $x \in [0, 1]$.

Доказательство. 1. Дополнительная функция распределения W_b имеет вид

$$S_{W_b}(t) = \begin{cases} 1, & t < b, \\ 0, & t \geq b. \end{cases}$$

Из (3) при $b \geq 0$ имеем

$$\pi(W_b) = \int_0^b g(1)\, dt = b,$$

а при $b < 0$:

$$\pi(W_b) = \int_b^0 [g(0) - 1]\, dt = -\int_b^0 dt = b.$$

2. Заметив, что $S_{X+b}(t) = S_X(t-b),\ t \in \mathbf{R}$, с помощью замены переменных $u = t-b$ из (3) получаем представление

$$\pi(X + b) = \int_{-\infty}^{-b} [g(S_X(u)) - 1]\, du + \int_{-b}^{\infty} g(S_X(u))\, du.$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \pi(X + b) = \pi(X) - \int_{-b}^{0} [g(S_X(u)) - 1]\, du + \int_{-b}^{0} g(S_X(u))\, du \\ = \pi(X) + \int_{-b}^{0} du = \pi(X) + b, \end{aligned}$$

что и требовалось.

3. При $a = 0$ равенство очевидно. Для $a > 0$ имеем $S_{aX}(t) = S_X(t/a),\ t \in \mathbf{R}$, поэтому с помощью замены переменных $u = t/a$ получаем

$$\begin{aligned} \pi(aX) = \int_{-\infty}^{0} [g(S_{aX}(t)) - 1]\, dt + \int_{0}^{\infty} g(S_{aX}(t))\, dt \\ = a\int_{-\infty}^{0} [g(S_X(u)) - 1]\, du + a\int_{0}^{\infty} g(S_X(u))\, du = a\pi(X), \end{aligned}$$

что и требовалось.

4. При $a < 0$ для почти всех $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$S_{aX}(t) = \mathbf{P}\{aX > t\} = \mathbf{P}\{X < t/a\} = 1 - S_X(t/a).$$

Используя снова замену переменных $u = t/a$, получаем

$$\begin{aligned}\pi_g(aX) &= \int_{-\infty}^{0} [g(S_{aX}(t)) - 1]\, dt + \int_0^\infty g(S_{aX}(t))\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} [g(1 - S_X(t/a)) - 1]\, dt + \int_0^\infty g(1 - S_X(t))\, dt \\ &= -a \int_{\infty}^{0} \widetilde{g}(S_X(u)\, du - a \int_0^{-\infty} [\widetilde{g}(S_X(u)) - 1]\, du \\ &= a \int_{-\infty}^{0} [\widetilde{g}(S_X(u)) - 1]\, du + a \int_0^\infty \widetilde{g}(S_X(u))\, du = a\pi_{\widetilde{g}}(X).\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\diamond$

Предложение 3.4 *Для меры возмущенной вероятности справедливо представление*

$$\pi_g(X) = \int_0^1 S_X^{-1}(v)\, dg(v). \tag{17}$$

Доказательство предоставляется читателю (упражнение 5.4).

Предложение 3.5 *Для произвольных $g \in \mathcal{G}$, $X \in \mathcal{X}_g$ справедливо*

$$\pi_g(-X) = -\widetilde{\pi}_g(X),$$

где $\widetilde{\pi}_g$ – двойственная мера риска, определенная в (5).

Доказательство. Для произвольного распределения при почти всех $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$S_{-X}(t) = \mathbf{P}\{-X > t\} = \mathbf{P}\{X < -t\} = 1 - S_X(-t). \tag{18}$$

Из (3) с помощью элементарных преобразований, (1) и (18) получаем

$$\begin{aligned}\pi_g(-X) &= \int_{-\infty}^{0} [g(S_{-X}(t)) - 1]\, dt + \int_0^\infty g(S_{-X}(t))\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} [g(1 - S_X(-t)) - 1]\, dt + \int_0^\infty g(1 - S_X(-t))\, dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} [\widetilde{g}(S_X(-t))]\, dt + \int_0^\infty [1 - \widetilde{g}(S_X(-t))].\, dt\end{aligned}$$

Замена переменных $u = -t$ приводит далее к

$$\begin{aligned}\pi_g(-X) &= \int_{\infty}^{0} \widetilde{g}(S_X(u))\, du + \int_0^{-\infty} [\widetilde{g}(S_X(u)) - 1]\, du \\ &= -\int_{-\infty}^{0} [\widetilde{g}(S_X(u)) - 1]\, du - \int_0^\infty \widetilde{g}(S_X(u))\, du \\ &= -\pi_{\widetilde{g}}(X) = -\widetilde{\pi}_g(X),\end{aligned}$$

что и утверждалось. $\diamond$

Следствие 3.1 *Если распределение X симметрично, то*

$$\pi_g(X) + \widetilde{\pi}_g(X) = 0.$$

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 3.5, поскольку X и $-X$ имеют одинаковые распределения. $\diamond$

4 Вычисление и оценивание

В данном параграфе рассмотрим метод вычисления меры возмущенной вероятности для дискретного распределения, а также метод ее статистического оценивания по наблюдениям.

Пусть распределение случайной величины X сосредоточено в конечном числе точек:

$$\mathbf{P}\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, \ldots, n;\ \ p_1 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0,\ \ p_1 + \ldots + p_n = 1. \qquad (19)$$

Без ограничения общности можно считать, что точки x_k расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Предложение 4.1 *Значение меры возмущенной вероятности для распределения (19) может быть вычислено по формулам*

$$\pi_g(X) = \sum_{s=1}^{n} g\left(\sum_{k=s}^{n} p_k\right)(x_s - x_{s-1}), \qquad (20)$$

где $x_0 = 0$, *или*

$$\pi_g(X) = \sum_{s=1}^{n} x_s \left[g\left(\sum_{k=s}^{n} p_k\right) - g\left(\sum_{k=s+1}^{n} p_k\right)\right], \qquad (21)$$

где пустая сумма $\sum_{k=n+1}^{n} p_k$ *полагается равной 0.*

Доказательство. Пусть r – номер, такой, что $x_r \leq 0 \leq x_{r+1}$. Из (3) с учетом (19) вытекает

$$\begin{aligned}\pi_g(X) = &\left[g\left(\sum_{k=2}^{n} p_k\right) - 1\right](x_2 - x_1) \ldots + \left[g\left(\sum_{k=r}^{n} p_k\right) - 1\right](x_r - x_{r-1}) \\ &+ \left[g\left(\sum_{k=r+1}^{n} p_k\right) - 1\right](0 - x_r) + g\left(\sum_{k=r+1}^{n} p_k\right)(x_{r+1} - 0) \\ &+ g\left(\sum_{k=r+2}^{n} p_k\right)(x_{r+2} - x_{r+1}) + \ldots + g\left(\sum_{k=n}^{n} p_k\right)(x_n - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что слагаемые, порождаемые -1 в квадратных скобках, дают в сумме $x_1 = g(1)(x_1 - x_0)$, поэтому окончательно получаем

$$\pi_g(X) = x_1 + \sum_{s=2}^{n} g\left(\sum_{k=s}^{n} p_k\right)(x_s - x_{s-1}) = \sum_{s=1}^{n} g\left(\sum_{k=s}^{n} p_k\right)(x_s - x_{s-1}),$$

что и требовалось.

Для доказательства (21) используем (17), заметив, что

$$S_X^{-1}(v) = x_k,\ \ v \in \left(\sum_{s=k+1}^{n} p_k, \sum_{s=k}^{n} p_k\right),\ \ k = 1, \ldots, n.$$

Неоднозначность в задании S_X^{-1} в точках $\sum p_k$ никак не влияет на значение интеграла в (17), поэтому функции S_X^{-1} можно приписать в этих точках произвольные конечные значения. Имеем

$$\begin{aligned}\pi_g(X) &= x_n g(p_n) + x_{n-1}(g(p_n + p_{n-1}) - g(p_n)) \\ &\quad + \ldots + x_1(g(1) - g(p_n + \ldots + p_2)) \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s \left[g\left(\sum_{k=s}^{n} p_k\right) - g\left(\sum_{k=s+1}^{n} p_k\right)\right],\end{aligned}$$

что и требовалось. ◇

Отметим, что эквивалентность (20) и (21) можно доказать с помощью правила "суммирования по частям содержащегося в следующей лемме.

Лемма 4.1 *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ – произвольные вещественные числа. Тогда*

$$\sum_{s=1}^{n} a_s(b_s - b_{s-1}) = \sum_{s=1}^{n} b_s(a_s - a_{s+1}),$$

где полагается $a_0 = b_{n+1} = 0$.

Доказательство – упражнение 5.6.

Приведем еще один простой способ статистического оценивания π_g по выборке наблюдений. Пусть $X_1, ..., X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с тем же распределением, что и X, а $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ – соответствующие порядковые статистики. Тогда, используя эмпирическое распределение, приписывающее точкам $X_1, \ldots, X_n$ вероятности $1/n$, в формулах (20), (21), получаем

$$\widehat{\pi}_g(X) = \sum_{s=1}^{n} g\left(\frac{n-s+1}{n}\right)(X_{(s)} - X_{(s-1)}) \tag{22}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} X_{(s)}\left[g\left(\frac{n-s+1}{n}\right) - g\left(\frac{n-s}{n}\right)\right]. \tag{23}$$

5 Упражнения

Упражнение 5.1 *Доказать лемму 2.1 для случая $\mathbf{E}|X| = \infty$.*

Упражнение 5.2 *Пусть $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, а случайная величина X имеет дополнительную функцию распределения*

$$S_X(t) = \begin{cases} (1+t)^{-2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Доказать, что $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ но $X \notin \mathcal{X}_g$.

Упражнение 5.3 *Построить примеры несовпадения классов $\widetilde{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}_g$ ввиду нарушения условий $g'(1) > 0$ и $g'(1) < \infty$. (*Указание. *Для построения таких примеров необходимо обеспечить специфическое поведение $S_X(t)$ при $t \to -\infty$).*

Упражнение 5.4 *Доказать предложение 3.4 методом, примененным в лемме 2.2.*

Упражнение 5.5 *Вывести формулы вычисления меры возмущенной вероятности для дискретных распределений, сосредоточенных на множестве всех неотрицательных целых чисел $\mathcal{N}$ и множестве всех целых чисел $\mathcal{Z}$:*

$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad \mathcal{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Упражнение 5.6 *Доказать правило "суммирования по частям"(лемма 4.1) и показать с его помощью эквивалентность формул (20) и (21).*

Список литературы

[1] Новоселов А.А. (2000) Основные понятия теории риска. *Лекция для студентов КГУ по курсу 'Теория риска'.* http://risktheory.novosyolov.com/lectures.htm

[2] Wang, S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*[1], **26**, pp. 71-92.

[3] Young V.R. (1999) Discussion of Christofides' Conjecture Regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, **29**, 2, 191–195.

[1]Полные тексты статьей из журнала ASTIN Bulletin доступны в интернете в формате PDF по адресу http://www.casact.org/library/astin/