Применение техники независимых вероятностных вычислений в зависимых моделях

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов математического факультета КГУ
(предварительная версия)

22 августа 2006 г.

Аннотация

В лекции рассматриваются примеры вероятностных моделей с зависимыми событиями и испытаниями, для которых оказывается возможным производить вероятностные расчеты и делать выводы на основании параллельных моделей с независимыми событиями и испытаниями. Такая замена представляет собой важный инструментарий, упрощающий анализ вероятностных моделей.

Содержание

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Академгородок, e-mail: anov@inbox.ru

1 Введение

Хорошо известно, что многие случайные процессы со сложной структурой зависимостей с помощью преобразования пространства состояний можно представить в виде марковских процессов, см. §2.7. Такое преобразование иногда упрощает модель и позволяет проводить более глубокий ее анализ.

Возникает естественный вопрос: а нельзя ли пойти дальше и посредством каких-либо преобразований совершенно избавиться от вероятностной зависимости в модели? Такой переход позволил бы вычислять вероятности сложных событий - пересечений в виде произведений вероятностей пересекаемых событий. Совершенно избавиться от зависимости, по-видимому, непросто, но в некоторых случаях оказывается возможным использование техники произведения вероятностей событий и в зависимых моделях.

Одно направление такого рода рассматривалось в [1], где предложено обобщение понятия вероятностной зависимости событий и вводится независимость событий относительно разбиения пространства элементарных исходов модели. В рамках этого направления получаются замкнутые формулы вычисления вероятностей сложных конфигураций событий для различных категорий зависимости событий. Это направление, впрочем, только начало развиваться и еще далеко от своего завершения. Представляет интерес сопоставление этого подхода с общим понятием независимости испытаний (так были названы разбиения пространства элементарных исходов), введенном в классической книге А.Н. Колмогорова [2].

Другое направление охватывает более узкий класс моделей, представимых в виде процессов с независимыми приращениями. Некоторые модели из этого класса и составляют предмет настоящей лекции. Все такие модели изучались ранее, а здесь мы посмотрим на них под другим углом зрения, сопоставляя зависимость и независимость различных событий в этих моделях.

Идея настоящей лекции возникла в процессе дискуссии на "Банковском форуме" об обосновании "формулы кумулятивной вероятности" с И.Т. Фарраховым [8], которому автор выражает глубокую признательность.

Предварительные версии данной лекции будут публиковаться на сайте для просмотра и обсуждения. Приветствуются все комментарии, замечания и возражения, присланные мне по адресу anov@inbox.ru .

2 Предварительные сведения

В настоящем параграфе напомним необходимые понятия, определения и факты, а также опишем переход от произвольного случайного процесса к марковскому. Материал параграфа представлен сжато и не предназначен для первоначального знакомства с предметом. Всюду далее $\mathbf{R}$ обозначает множество всех вещественных чисел $(-\infty, \infty)$, а $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Чаще всего мы будем использовать конечное пространство элементарных исходов Ω, состоящее из N элементов ($|\Omega| = N$). При этом без напоминания будет использоваться полная алгебра событий $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

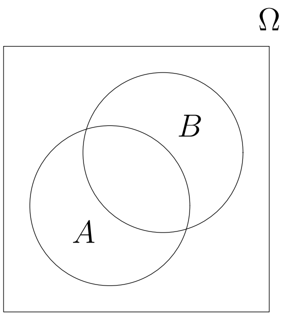
Пример 2.1 Пусть $N = 3$, т.е. Ω состоит из трех элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Тогда полная алгебра событий 2^Ω состоит из $2^{|\Omega|} = 2^3 = 8$ событий

$$2^\Omega = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}.$$

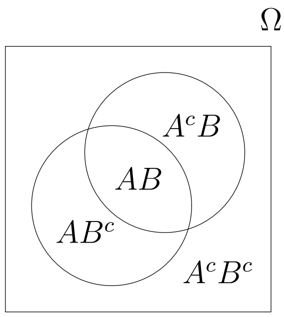
Вероятностная мера $\mathbf{P}$ в данном примере вполне определяется тройкой неотрицательных чисел p_1, p_2, p_3 таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Именно: $\mathbf{P}(\omega_1) = p_1, \mathbf{P}(\omega_2) = p_2, \mathbf{P}(\omega_3) = p_3$. $\diamond$

2.1 События и терраски

Для произвольного события $A \in \mathcal{A}$ будем обозначать A^c его дополнение: $A^c = \Omega \setminus A$. Очевидно, $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Пересечение событий $A, B \in \mathcal{A}$ часто будем записывать, как произведение: $A \cap B = AB$. Объединение непересекающихся событий будем обозначать также символом $+$: если $AB = \emptyset$, то $A \cup B = A + B$. В частности, всегда $A + A^c = \Omega$, а аддитивность вероятности $\mathbf{P}$ влечет за собой равенства $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ и $\mathbf{P}(A + A^c) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.



а) События A, B



б) Терраски

Рис. 1: События A, B и порождаемые ими терраски AB^c, AB, A^cB, A^cB^c

Пара событий A, B разбивает пространство элементарных исходов Ω на четыре непересекающиеся части AB, AB^c, A^cB, A^cB^c, называемые террасками, см. рис. 1. Некоторые из террасок могут оказаться пустыми, однако, в любом случае выполняются соотношения

$$AB + A^cB + AB^c + A^cB^c = \Omega, \tag{1}$$

$$A = A\Omega = A(B + B^c) = AB + AB^c, \tag{2}$$

$$B = \Omega B = (A + A^c)B = AB + A^cB, \tag{3}$$

$$A \cup B = AB^c + AB + A^cB = \Omega \setminus (A^cB^c). \tag{4}$$

Замечание 2.1 Три события разбивают Ω на 8 террасок, и вообще, n событий разбивают Ω на 2^n террасок, см. упр. 1. $\diamond$

Лемма 2.1 *Для произвольных событий $A, B \in \mathcal{A}$ выполняется равенство*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

Доказательство. Из (2), (3), (4) с учетом аддитивности вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB^c) + \mathbf{P}(AB), \tag{5}$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A^cB) + \mathbf{P}(AB), \tag{6}$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(AB^c) + \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A^cB) = 1 - \mathbf{P}(A^cB^c), \tag{7}$$

так что

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(AB),$$

что и дает утверждение леммы. $\diamond$

Замечание 2.2 Обобщение леммы 2.1 на случай объединения $n > 2$ событий можно найти в [9, теорема из §IV.1]. $\diamond$

2.2 Зависимые события

Определение 2.1 События $A, B \in \mathcal{A}$ называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Лемма 2.2 *Если события A и B независимы, то независимыми являются также события A и B^c, A^c и B, A^c и B^c.*

Доказательство. Из (5), используя независимость A, B, получаем

$$\mathbf{P}(AB^c) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B^c),$$

что, по определению 2.1, и означает независимость событий A и B^c. Для других пар событий вывод получается аналогично из (6), (7):

$$\mathbf{P}(A^cB) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B),$$

$$\mathbf{P}(A^cB^c) = 1 - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A^cB) - \mathbf{P}(AB^c) = 1 - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) -$$
$$-(1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = (1 - \mathbf{P}(A))(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B^c).$$

Доказательство завершено. $\diamond$

Замечание 2.3 Лемма 2.2 позволяет перейти от понятия независимости пары *событий* A, B к понятию независимости пары *разбиений* (A, A^c) и (B, B^c) пространства элементарных исходов Ω. Отметим, что именно по такому пути вводилось понятие независимости в классическом труде [2]. $\diamond$

Лемма 2.3 *Пусть независимые события $A, B \in \mathcal{A}$ таковы, что $A \subseteq B$. Тогда выполняется по крайней мере одно из равенств $\mathbf{P}(A) = 0$, $\mathbf{P}(B) = 1$.*

Доказательство. Включение $A \subseteq B$ влечет $AB = A$, так что соотношение независимости дает $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, т.е.

$$\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = 0,$$

что и требовалось. $\diamond$

Лемма 2.4 *Пусть независимые события $A, B \in \mathcal{A}$ не пересекаются. Тогда выполняется по крайней мере одно из равенств $\mathbf{P}(A) = 0$, $\mathbf{P}(B) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$, соотношение независимости дает $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0$, а это означает, что по крайней мере один из сомножителей равен 0, что и требовалось. $\diamond$

Замечание 2.4 Лемма 2.3 по существу означает, что в практически интересных случаях, когда вероятности событий положительны и строго меньше 1, *вложенные события всегда зависимы*. Более того, в случае вложенных событий A, B всегда справедливо $\mathbf{P}(AB) = \min(\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B))$. Это означает, что вероятность пересечения событий достигает *верхней границы Фреше* [6], что индицирует наличие максимальной положительной зависимости.

Лемма 2.4 является двойственной к лемме 2.3. В практически важных случаях событий положительной вероятности *непересекающиеся события всегда зависимы*, причем зависимость в этом случае — максимальная отрицательная, соответствующая *нижней границе Фреше* [6]. $\diamond$

2.3 Условная вероятность

Для событий B, обладающих положительной вероятностью $P(B)$, можно ввести понятие условной вероятности. Условная вероятность события A при условии, что наступило событие B, задается выражением

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}\,. \tag{8}$$

Формулу (8) можно представить в виде $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$, который по индукции легко обобщается на случай n событий $A_1, \ldots, A_n$. Именно, справедлива формула

$$\mathbf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbf{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})\mathbf{P}(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) \cdots \mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1), \tag{9}$$

см. также [9, §V.1].

Нам потребуется еще формула полной вероятности.

Лемма 2.5 *Пусть $A \in \mathcal{A}$ — произвольное событие, а события $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{A}$ попарно не пересекаются и их объединение содержит A:*

$$H_i \cap H_j = \emptyset,\ i \neq j; \quad A \subseteq H_1 + \cdots + H_n.$$

Тогда справедлива формула полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \,|\, H_i)\mathbf{P}(H_i). \tag{10}$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве полезного упражнения 2. $\diamond$

2.4 Случайные величины и векторы

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbf{R}$.

Определение 2.2 *Случайной величиной* X называется произвольное отображение $X : \Omega \to \mathbf{R}$, измеримое относительно пары σ-алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

В случае конечного пространства элементарных исходов Ω и полной алгебры событий $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ все отображения $X : \Omega \to \mathbf{R}$ измеримы, а линейное пространство всех случайных величин изоморфно $\mathbf{R}^{|\Omega|}$. Распределение случайной величины характеризуется посредством функции множества $P_X(B) = \mathbf{P}(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}$ или функции точки $F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega :\ X(\omega) \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbf{R}$; последняя обычно называется **функцией распределения** случайной величины X.

Если область значений $R \subseteq \mathbf{R}$ случайной величины X не более чем счетна, то распределение X можно охарактеризовать функцией $p(r) = \mathbf{P}(X = r)$, $r \in R$; в этом случае X обычно называют дискретной случайной величиной.

Набор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин называют *случайным вектором*. Случайный вектор характеризуется совместным распределением, которое в общем случае описывается функцией совместного распределения

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

В частном случае дискретного распределения, когда область значений R_i каждой переменной X_i, $i = 1, \ldots, n$ не более, чем счетна, распределение также можно охарактеризовать функцией

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n);\ \ x_1 \in R_1, \ldots, x_n \in R_n. \tag{11}$$

Определение 2.3 Компоненты случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ (случайные величины $X_1, \ldots, X_n$) называются *независимыми*, если для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ независимы события $X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n$. Другими словами, должно выполняться соотношение

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

а в дискретном случае — также

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = x_n);\ \ x_1 \in R_1, \ldots, x_n \in R_n.$$

2.5 Полиномиальные модели

Рассмотрим испытание, в котором событие, условно называемое "успехом", наступает с вероятностью p. Обозначим X количество успехов в серии из n независимых испытаний такого типа (*схема Бернулли*). X может принимать произвольные целочисленные значения от 0 до n, а распределение вероятностей количества успехов называют *биномиальным распределением* [9] с параметрами n, p:

$$\mathbf{P}(X = k) = B(n, p, k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где C_n^k обозначено число сочетаний из n по k, равное

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)!}.$$

Можно рассмотреть обратную задачу: сколько потребуется провести испытаний k для того, чтобы появилось ровно r успехов. Параметр p остается без изменений. Ясно, что необходимое количество испытаний Y может принимать целочисленные значения $r, r+1, \ldots$, а распределение Y называют *обратным биномиальным распределением* с параметрами r, p. Вероятности этого распределения задаются формулами [9]

$$\mathbf{P}(Y = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \ldots \tag{13}$$

В частности, при $r = 1$ возникает геометрическое распределение [9], описывающее распределение вероятностей количества испытаний, необходимых для появления первого успеха:

$$\mathbf{P}(Y = k) = C_{k-1}^{0} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

В биномиальной модели каждое испытание имеет два исхода (успех и неудача) с вероятностями p и $1-p$, соответственно. Непосредственным обобщением такой модели является *полиномиальная* модель, в которой каждое испытание имеет r различных исходов, вероятности появления которых в отдельном испытании равны p_j, $j = 1, \ldots, r$. Вероятность того, что в последовательности из n независимых испытаний такого типа наступит ровно k_j исходов типа j, $j = 1, 2, \ldots, r$, где k_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k_1 + \cdots + k_r = n$, равна [9, §VI.9]

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

В частности, для *триномиального* распределения ($r = 3$) получаем значения вероятностей

$$P(k_1, k_2, k_3) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}. \tag{15}$$

Далее нам потребуется применение триномиальной модели в следующем частном случае. В k-м испытании случайная величина Y_k может принимать значения 1, 0, -1 с вероятностями p, $1-p-q$, q, соответственно. При этом сумма $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ может принимать целочисленные значения от $-n$ до n, а распределение вероятностей имеет вид

$$\mathbf{P}(S_n = y) = B_3(n, y) = \sum_{N_3(n,y)} P(k_1, k_2, k_3), \quad -n \le y \le n, \tag{16}$$

где множество индексов суммирования $N_3(n,y)$ задается выражением

$$N_3(n,y) = \{(k_1,k_2,k_3):\ k_1+k_2+k_3=n,\ \ k_1-k_3=y\}.$$

Нетрудно показать, что в $N_3(n,y)$ входят все тройки индексов, для которых $0 \le k_2 \le n-|y|$ и k_2 имеет ту же четность, что и $n-y$. В качестве примера в табл. 1 приведен состав множества индексов суммирования для $n=4$ и всех $y=-4,-3,\dots,3,4$. Для понимания механизма вычисления триномиальных вероятностей полезно выполнить упр. 3, 4.

Таблица 1: Состав множеств индексов суммирования $N_3(n,y)$ в (16) при $n=4$

y	$N_3(n,y)$
-4	{(0,0,4)}
-3	{(0,1,3)}
-2	{(1,0,3),(0,2,2)}
-1	{(1,1,2),(0,3,1)}
0	{(2,0,2),(1,2,1),(0,4,0)}
1	{(2,1,1),(1,3,0)}
2	{(3,0,1),(2,2,0)}
3	{(3,1,0)}
4	{(4,0,0)}

2.6 Случайные процессы

Для простоты будем рассматривать только процессы в дискретном времени с конечным или счетным временны́м горизонтом и не более чем счетным числом значений; для наших целей таких процессов вполне достаточно. Обозначим $\mathcal{T}=\{0,1,2,\dots,T\}$ конечный (или $\mathcal{T}=\{0,1,2\dots\}$ — счетный) набор моментов времени, а R — конечное или счетное множество вещественных чисел, $R\subseteq \mathbf{R}$, называемое *пространством состояний* процесса[1]. Обобщение на случай непрерывного времени и более богатого множества значений процесса добавляет немало технических трудностей, но не вносит ничего нового в интересующий нас предмет, поэтому здесь такое обобщение рассматриваться не будет.

Определение 2.4 *Случайным процессом* на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ называется произвольное измеримое отображение $f:\Omega\times\mathcal{T}\to R$ из декартова произведения $\Omega\times\mathcal{T}$ в множество вещественных чисел R.

Совокупность всех значений процесса $f(\omega,\cdot)$ при фиксированном $\omega\in\Omega$ называется траекторией процесса $S_\omega(\cdot)$. При фиксированном $t\in\mathcal{T}$ выражение $f(\cdot,t)$ задает отображение из Ω в R, т.е. случайную величину, которую обозначим $X_t(\cdot)$. Эта случайная величина описывает поведение значений процесса в момент времени t. Процесс же в целом представляет собой совокупность этих случайных величин для всех моментов времени, и обычно обозначается $(X_t,\ t\in\mathcal{T})$.

[1]Рассматривают и более общие пространства состояний, например, в теории цепей Маркова, но нам такое обобщение не потребуется.

Замечание 2.5 Достаточно распространенным является способ построения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ случайного процесса в виде *произведения* более простых вероятностных пространств. При этом в качестве исходных объектов задаются вероятностные пространства $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, \mathcal{P}_t)$, соответствующие моментам времени $t \in \mathcal{T}$. Пространство элементарных исходов (траекторий) процесса имеет вид декартова произведения

$$\Omega = \bigotimes_{t \in \mathcal{T}} \Omega_t,$$

а σ-алгебра $\mathcal{A}$ и вероятностная мера $\mathbf{P}$ строятся с помощью процедуры продолжения меры. Детали интересующийся читатель может найти, например, в [3]. $\diamond$

Пример 2.2 Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ состоит из трех элементов, и на Ω задано распределение вероятностей $\mathbf{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbf{P}(\omega_2) = 1/2$, $\mathbf{P}(\omega_3) = 1/4$. Пусть, далее, $T = 3$, т.е. $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ состоит из четырех моментов времени. Далее, выберем $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Тогда случайный процесс можно описать таблицей значений $f(\omega, t)$, пример которой приведен в табл. 2. Здесь, например, $f(\omega_1, 2) = 4$, $f(\omega_2, 3) = 3$ и $f(\omega_3, 3) = 0$. Траектории процесса

Таблица 2: Распределение случайного процесса в примере 2.2

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="4">t</th></tr>
<tr><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ω</td><td>ω_1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>ω_2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>ω_3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

описываются строками табл. 2. Например, траектория S_{ω_1} имеет следующий вид: $S_{\omega_1}(0) = 2$, $S_{\omega_1}(1) = 3$, $S_{\omega_1}(2) = 4$, $S_{\omega_1}(3) = 5$. Вероятность реализации этой траектории процесса задается вероятностью элементарного исхода ω_1 и равна в данном случае $1/4$. В столбцах табл. 2, отмеченных значениями моментов времени t, представлены случайные величины X_t, характеризующие состояние процесса в соответствующие моменты времени. Так, в столбце для $t = 0$ записаны значения X_0; видно, что $X_0(\omega_1) = X_0(\omega_2) = X_0(\omega_3) = 2$. Это можно интерпретировать, как достоверно известное состояние процесса в момент времени $t = 0$. Случайная величина X_1 задается соотношениями $X_1(\omega_1) = 3, X_1(\omega_2) = 2, X_1(\omega_3) = 1$. Случайные величины X_2, X_3 аналогично описываются значениями из последних столбцов табл. 2. $\diamond$

Случайный процесс f в данном случае, по существу, является случайным вектором $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$. Полное описание такого случайного вектора, как мы помним, задается совместным распределением его компонент (11)

$$\mathbf{P}(X_0 = r_0, X_1 = r_1, \ldots, X_T = r_T),\ r_0, r_1, \ldots, r_T \in R.$$

Из (9) вытекает, что одним из способов задания такого распределения является задание всевозможных условных распределений

$$\mathbf{P}(X_t = r_t \,|\, X_{t-1} = r_{t-1}, \ldots, X_0 = r_0);\quad r_0, r_1, \ldots, r_t \in R,\quad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (17)$$

и начального распределения

$$\mathbf{P}(X_0 = r_0),\ r_0 \in R. \qquad (18)$$

Пример 2.3 [Продолжение примера 2.2] Приведем условные и начальное распределения (17), (18) для процесса из примера 2.2. В этих распределениях участвует много вероятностей различных событий, большинство из которых равны 0. Мы приведем здесь только значения ненулевых вероятностей. Начальное распределение описывается соотношением $\mathbf{P}(X_0 = 2) = 1$. При $t = 1$ условные вероятности из (17) совпадают с безусловными:

$$\mathbf{P}(X_1 = 3|X_0 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 3) = 1/4,$$
$$\mathbf{P}(X_1 = 2|X_0 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/2,$$
$$\mathbf{P}(X_1 = 1|X_0 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1/4.$$

При $t = 2$ имеет место частичная зависимость состояния процесса от состояния в предыдущий момент времени:

$$\mathbf{P}(X_2 = 4|X_0 = 2, X_1 = 3) = \mathbf{P}(X_2 = 4|X_1 = 3) = 1/4,$$
$$\mathbf{P}(X_2 = 4|X_0 = 2, X_1 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 4|X_1 = 2) = 1/2,$$
$$\mathbf{P}(X_2 = 2|X_0 = 2, X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 2) = 1/4.$$

При $t = 3$ "память" процесса простирается уже на два шага назад:

$$\mathbf{P}(X_3 = 2|X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4) = \mathbf{P}(X_3 = 2|X_1 = 3, X_2 = 4) = 1/4,$$
$$\mathbf{P}(X_3 = 3|X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 4) = \mathbf{P}(X_3 = 3|X_1 = 2, X_2 = 4) = 1/2,$$
$$\mathbf{P}(X_3 = 0|X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_3 = 0|X_2 = 2) = 1/4.$$

В данном примере видно, что для вероятностного описания состояния процесса в момент времени $t = 3$ недостаточно информации о его состоянии в момент времени $t = 2$. В одном из случаев влияние оказывает и состояние, в котором процесс находился в момент времени $t = 1$. $\diamond$

Определение 2.5 Случайный процесс, для которого условные вероятности (17) содержат в условиях лишь состояния в предыдущий момент времени:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(X_t = r_t \,|\, X_{t-1} = r_{t-1}, \ldots, X_0 = r_0) = \mathbf{P}(X_t = r_t \,|\, X_{t-1} = r_{t-1}),\\ r_0, r_1, \ldots, r_t \in R, \quad t = 1, 2, \ldots, T,\end{gathered} \tag{19}$$

называется *марковским*.

Пример 2.4 [Продолжение примеров 2.2, 2.3] Слегка изменив исходное задание процесса из примера 2.2, зададим процесс таблицей 3. Этот процесс уже является марковским, в чем

Таблица 3: Распределение случайного процесса в примере 2.4

		t			
		0	1	2	3
ω	ω_1	2	3	4	2
	ω_2	2	3	4	3
	ω_3	2	1	2	0

нетрудно убедиться, описав его в терминах условных вероятностей по схеме (17). Проверку читателю предлагается провести самостоятельно, см. упр. 5. $\diamond$

Определение 2.6 Случайный процесс $(X_t,\, t \in \mathcal{T})$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для произвольных моментов времени $s < t < u$ случайные величины $X_t - X_s$ и $X_u - X_t$ независимы.

Пример 2.5 Пусть случайные величины Y_t, $t = 1, \ldots, T$ независимы, а X_0 — произвольная случайная величина. Зададим случайный процесс $(X_t,\, t \in \mathcal{T})$ выражениями

$$X_t = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_t, \ \ t = 1, \ldots, T.$$

Полученный процесс имеет независимые приращения, доказательство предоставляется читателю, см. упр. 6. $\diamond$

2.7 Представление случайного процесса в марковском виде

Покажем, как произвольный процесс в дискретном времени можно представить в виде марковского процесса за счет преобразования пространства состояний. Пусть произвольный процесс задан пространством состояний R, переходными вероятностями (17) и начальным распределением (18).

Для $t \in \mathcal{T}$ обозначим $Y_t = (X_0, X_1, \ldots, X_t)$ начальный отрезок процесса. Обозначим $R^{(0)} = R$, $R^{(1)} = R \times R$, $R^{(2)} = R \times R \times R$ и, вообще, $R^{(t-1)} = R \times \cdots \times R$ — декартову степень t пространства состояний R. Множество $R^{(1)}$ состоит из пар элементов R, $R^{(2)}$ — из троек элементов R, а множество $R^{(t)}$ — из последовательностей элементов R длины $t+1$. При $s > t$ скажем, что $r^{(s)} = (r_0^{(s)}, \ldots, r_s^{(s)}) \in R^{(s)}$ является продолжением последовательности $r^{(t)} = (r_0^{(t)}, \ldots, r_t^{(t)}) \in R^{(t)}$, если начальный отрезок первой последовательности длины $t+1$ совпадает со второй последовательностью:

$$r_i^{(s)} = r_i^{(t)}, \ i = 0, \ldots, t.$$

Далее, обозначим $\widetilde{R}$ объединение всех введенных декартовых степеней:

$$\widetilde{R} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} R^{(t)}.$$

Множество $\widetilde{R}$ будет служить пространством состояний нового (марковского) процесса.

Сам процесс Y_t, $t = 0, 1, \ldots, T$ зададим начальным распределением вероятностей

$$\mathbf{P}(Y_0 = r_0) = \mathbf{P}(X_0 = r_0), \ r_0 \in R^{(0)} = R$$

и переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Y_t = r^{(t)} \in \widetilde{R} \,|\, Y_{t-1} = r^{(t-1)} \in \widetilde{R}). \tag{20}$$

В этой формуле вероятности для пар $r^{(t-1)}, r^t$, в которых $r^t \in R^{(t)}$ является продолжением $r^{(t-1)} \in R^{(t-1)}$, выбираются непосредственно из (17), а остальные вероятности полагаются равными 0.

Замечание 2.6 Если судить по определениям, то марковский процесс представляется существенно более простым, чем процесс общего вида. Но изучение даже простейшего примера (см. упр. 7) ясно показывает, что рассмотренный переход приводит к весьма громоздкому построению. Целью данного пункта является не рекомендация преобразования всех процессов к марковскому виду, а, скорее, предостережение обратного толка: стремление к простоте иногда может приводить к обратному эффекту. $\diamond$

3 Миграция заемщика по двум категориям

Рассмотрим следующую простую ситуацию [8]. Банк изучает вопрос о выдаче кредита заемщику. В начальный момент времени заемщик находится в "нормальном" состоянии ("н"), а в течение фиксированного периода времени (месяца) может перейти в неплатежеспособное состояние ("д" — дефолт) с вероятностью p, или остаться в нормальном состоянии с вероятностью $1-p$. При попадании в состояние дефолта заемщик остается в нем навсегда, и кредит банку не возвращается. Если же заемщик в начале очередного периода находится в нормальном состоянии, то вероятности его перехода в течение этого периода в состояния "д" и "н" сохраняют те же значения: p и $1-p$. Интерес представляет только случай $0<p<1$.

Требуется построить математическую модель процесса, позволяющую делать количественный анализ, в частности, вычислять вероятности перехода в состояние дефолта на протяжении продолжительных интервалов времени, состоящих из n периодов (например, в течение года, $n=12$ месяцев).

3.1 Модель общего вида

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство модели. На первом этапе его детальное строение неважно, конкретизацией мы займемся в п. 3.2. Для фиксированного $k=1,2,\dots,n$ рассмотрим событие A_k, содержательно означающее, что в конце периода k (или, что то же самое, в начале периода $k+1$) заемщик находился в нормальном состоянии ("н"). Кроме того, введем событие A_0: "в начале первого периода заемщик находился в нормальном состоянии". Из предположений ясно, что A_0 является достоверным событием, т.е., $A_0=\Omega$. Кроме того, поскольку из состояния дефолта возврата нет, понятно, что событие A_k влечет A_{k-1} (на русском языке это означает, что если в конце периода k заемщик находился в нормальном состоянии, то и в начале этого периода его состояние было, конечно, нормальным). На языке событий это означает, что $A_k \subseteq A_{k-1}$, $k=1,2,\dots,n$. То есть, справедлива цепочка включений

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \tag{21}$$

и, в частности,

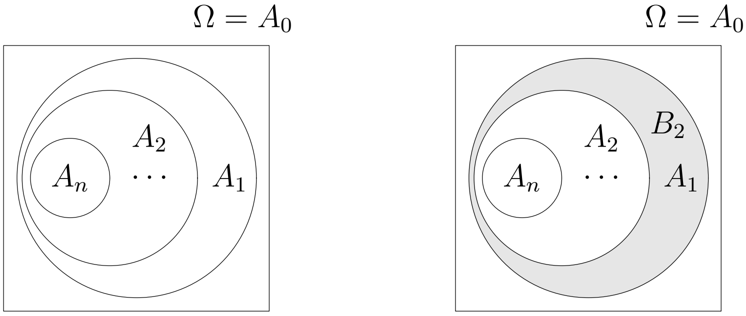
$$A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cdots A_k\,, \quad k=1,\dots,n. \tag{22}$$

На рис. 2.а вложенные события "не-дефолт" для всех периодов времени условно изображены в виде вложенных кругов.

Далее, обозначим B_k событие наступления дефолта в течение периода k, $k=1,\dots,n$. Каждое событие B_k состоит из тех элементарных исходов $\omega \in \Omega$, при которых заемщик в начале периода k находился в нормальном состоянии ($\omega \in A_{k-1}$), а в конце периода k не был в нормальном состоянии ($\omega \notin A_k$). Ясно, что B_k равно A_{k-1} за вычетом A_k, т.е. $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$. На рис. 2.б затененной областью в виде кольца изображено событие $B_2 = A_1 \setminus A_2$.

Из леммы 2.3 вытекает, события A_{k-1}, A_k зависимы при $k=2,3,\dots,n$. Предположение "если заемщик в начале периода k находился в нормальном состоянии, то вероятность к концу периода остаться в нормальном состоянии равна $1-p$"дает значения условных вероятностей

$$\mathbf{P}(A_k \,|\, A_{k-1}) = 1-p, \quad k=1,\dots,n. \tag{23}$$



а) Не-дефолты $A_1, \ldots, A_n$ Дефолт $B_2 = A_1 \setminus A_2$

Рис. 2: События модели

При $k = 1$ имеем $\mathbf{P}(A_1 \,|\, A_0) = \mathbf{P}(A_1 \,|\, \Omega) = \mathbf{P}(A_1) = 1 - p$, т.е., в первом периоде условная вероятность совпадает с безусловной.

Теперь можно вычислить вероятности событий A_k, $k = 1, \ldots, n$. Из (9) с использованием (22), (23) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_1 \cdots A_k) = \\ = \mathbf{P}(A_k \,|\, A_{k-1} \cdots A_1)\mathbf{P}(A_{k-1} \,|\, A_{k-2} \cdots A_1) \cdots \mathbf{P}(A_2 \,|\, A_1)\mathbf{P}(A_1) = \\ = \mathbf{P}(A_k \,|\, A_{k-1})\mathbf{P}(A_{k-1} \,|\, A_{k-2}) \cdots \mathbf{P}(A_2 \,|\, A_1)\mathbf{P}(A_1) = (1-p)^k. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее, из включения $A_k \subseteq A_{k-1}$ и равенства $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$ получаем $A_{k-1} = A_k + B_k$, откуда $\mathbf{P}(A_{k-1}) = \mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}(B_k)$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(A_{k-1}) - \mathbf{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p(1-p)^{k-1}. \tag{25}$$

Естественно, такой же результат получается при вычислении $\mathbf{P}(B_k)$ по определению условной вероятности с использованием включения $B_k \subseteq A_{k-1}$ и того факта, что вероятность наступления дефолта в течение периода k (событие B_k) при условии, что в начале периода состояние было нормальным (событие A_{k-1}), по предположению равна $\mathbf{P}(B_k \,|\, A_{k-1}) = p$:

$$\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(A_{k-1}B_k) = \mathbf{P}(B_k \,|\, A_{k-1})\mathbf{P}(A_{k-1}) = p(1-p)^{k-1}.$$

Замечание 3.1 Вероятности в формуле (25) совпадают с вероятностями геометрического распределения (14), которое возникает в схеме независимых испытаний. Причины такого совпадения результатов в схемах зависимых и независимых испытаний кроются в *независимости приращений* изучаемого процесса и подробно рассматриваются в §5. $\diamond$

Обозначим $B(k)$ событие, означающее наступление дефолта в одном из первых k периодов, $k = 1, \ldots, n$. Ясно, что $B(k) = B_1 + \cdots + B_k$ (наступление дефолта в одном из первых k периодов означает наступление дефолта либо в первом, либо во втором, ... либо в k-м периоде), поэтому

$$\mathbf{P}(B(k)) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(B_i) = p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1} = p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k, \ k = 1, \ldots, n.$$

С другой стороны, $B(k) + A_k = \Omega$ (либо в одном из первых k периодов наступил дефолт, либо к концу периода k заемщик находился в нормальном состоянии), так что снова, как и ожидалось,

$$\mathbf{P}(B(k)) = 1 - \mathbf{P}(A_k) = 1 - (1-p)^k, \ k = 1, \ldots, n.$$

Замечание 3.2 В [8] предложен следующий механизм упрощения расчета вероятности события A_n. В начале очередного периода k, $k = 2, 3, \dots, n$ можно исключать из рассмотрения элементарные исходы, соответствующие наступившим к этому моменту времени дефолтам, и работать только с "не-дефолтами". Формально это означает переход к последовательности вероятностных пространств $(A_{k-1}, \mathcal{A}_k, \mathbf{P}_k)$, каждое из которых используется для расчетов, относящихся к периоду $k = 1, \dots, n$. Здесь в качестве пространств элементарных исходов используется сужающаяся последовательность событий $A_0 = \Omega \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_{n-1}$; σ-алгебры $\mathcal{A}_k$ являются сужениями $\mathcal{A}$ на A_{k-1}, а вероятность $\mathbf{P}_k$ соответствует условной вероятности в исходном пространстве относительно A_{k-1}: $\mathbf{P}_k(A) = \mathbf{P}(A|A_{k-1})$, $A \in \mathcal{A}_k$. При этом вероятность не-дефолта в течение периода k вычисляется в новом вероятностном пространстве как безусловная вероятность. $\diamond$

3.2 Конкретизация модели

В настоящем пункте опишем реализации общей модели в конкретных вероятностных пространствах.

Рассмотрим конечное пространство элементарных исходов Ω, в котором каждый исход представлен последовательностью символов из набора "д", "н". Элемент ω_{n+1} представляет собой последовательность из n символов "н", и описывает элементарный исход, в котором дефолт не наступил ни в одном из месяцев; $\omega_{n+1} = $ (нн...н). Элементарный исход ω_k, в котором дефолт наступил в месяце k, $k = 1, \dots, n$ описывается последовательностью из $k-1$ символов "н" в начале последовательности и одного символа "д" в конце последовательности[2], например, $\omega_3 = $ (ннд). Пространство элементарных исходов имеет вид $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$ и состоит из $n+1$ элементов. Поскольку Ω конечно, используем полную алгебру событий $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

События A_k имеют вид $\{\omega_{k+1}, \dots \omega_{n+1}\}$, $k = 0, 1, \dots, n$. В частности, событие A_n, означающее, что в течение всего рассматриваемого периода времени дефолт не наступил, состоит из единственного элемента ω_{n+1}. Ввиду $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$ ясно, что B_k при каждом $k = 1, \dots, n$ состоит из единственного элемента ω_k. Используя результаты п. 3.1, теперь можно выписать значения вероятностной меры $\mathbf{P}$ на всех элементарных исходах из Ω, именно,

$$\mathbf{P}(\omega_k) = \mathbf{P}(B_k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, \dots, n; \quad \mathbf{P}(\omega_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) = (1-p)^n. \tag{26}$$

Проверка свойств построенной вероятностной меры $\mathbf{P}$ предоставляется читателю, см. упр. 8.

Пример 3.1 Пусть $n = 4$. Тогда Ω состоит из 5 элементов $\omega_1 = $ (д), $\omega_2 = $ (нд), $\omega_3 = $ (ннд), $\omega_4 = $ (нннд), $\omega_5 = $ (нннн). Из (26) выписываем вероятности элементарных исходов

$$\mathbf{P}(\text{д}) = p,\ \mathbf{P}(\text{нд}) = p(1-p),\ \mathbf{P}(\text{ннд}) = p(1-p)^2,$$

$$\mathbf{P}(\text{нннд}) = p(1-p)^3,\ \mathbf{P}(\text{нннн}) = (1-p)^4,$$

[2] При желании в качестве элементов Ω можно было бы использовать последовательности фиксированной длины n, дописывая в конце каждой из последовательностей $\omega_k, k = 1, \dots, n-1$ символы "д" в количестве $n-k$ с очевидной интерпретацией: попав в состояние дефолта, заемщик остается в нем до окончания рассматриваемого периода. Однако, такое выравнивание не создает в данном случае никаких преимуществ.

Каждое событие дефолта состоит из единственного элементарного исхода ($B_k = \{\omega_k\}$), поэтому их вероятности уже вычислены выше. События A_k, $k = 0, 1, \ldots, 4$ имеют вид

$$A_0 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\},\ A_1 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\},$$

$$A_2 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\},\ A_3 = \{\omega_4, \omega_5\},\ A_4 = \{\omega_5\},$$

а их вероятности задаются выражениями

$$\mathbf{P}(A_0) = 1,\ \mathbf{P}(A_1) = (1-p),\ \mathbf{P}(A_2) = (1-p)^2,\ \mathbf{P}(A_3) = (1-p)^3,\ \mathbf{P}(A_4) = (1-p)^4.$$

Вероятность дефолта на протяжении всего рассматриваемого промежутка времени равна $\mathbf{P}(B(4)) = 1 - (1-p)^4$. $\diamond$

Приведем еще одно конкретное представление общей модели из пункта 3.1, которое позволит привлечь для понимания задачи геометрическую интуицию. Рассмотрим стандартное вероятностное пространство $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, в котором пространством элементарных исходов служит вещественный отрезок $[0,1] \subseteq \mathbf{R}$, $\mathcal{B}$ представляет собой борелевскую σ-алгебру подмножеств $[0,1]$, а λ — мера Лебега на измеримом пространстве $([0,1], \mathcal{B})$. В этом пространстве события A_k, B_k можно изобразить отрезками вещественной прямой. Фрагмент такого представления для нескольких значений k показан на рис. 3. Здесь сначала событие $A_0 = [0,1]$ делится в пропорции $(1-p) : p$

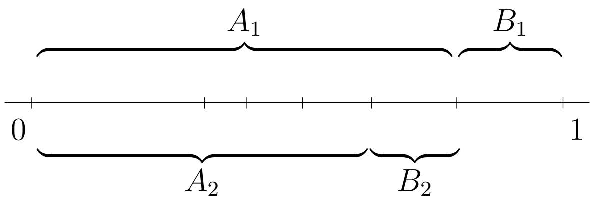


Рис. 3: События модели в пространстве $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$

на события A_1 и B_1. Затем событие A_1 делится в той же пропорции на A_2 и B_2, и т.д. После k шагов в левой части рисунка будет изображено множество A_k (отрезок длины $(1-p)^k$). Справа от него будет изображена последовательность (справа налево) отрезков длины $\mathbf{P}(B_i) = p(1-p)^{i-1}$, изображающих непересекающиеся события B_i, $i = 1, \ldots, k$.

4 Миграция заемщика по многим категориям

В §3 была рассмотрена модель миграции заемщика по двум категориям: "дефолт" и "не-дефолт". В настоящем параграфе мы разовьем эту модель, увеличив количество категорий, в которых может находиться заемщик. Это обобщение позволяет более подробно описывать способность заемщика возвращать кредит, а также отражать возможное ухудшение или улучшение финансового состояния заемщика до наступления его неплатежеспособности.

Сначала в п. 4.1 рассмотрим общую модель случайного блуждания, затем в п. 4.2 мы изучим модель миграции с бесконечным временны́м горизонтом, а потом в п. 4.3 перейдем к более сложной модели, в которой количество периодов времени конечно и равно T.

4.1 Простое случайное блуждание

4.1.1 Описание модели

Рассмотрим множество временны́х периодов $k = 1, 2, \ldots$ и множество моментов времени $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots\}$. Будем считать, что k-й период времени начинается в момент времени $k-1$ и заканчивается в момент времени k. Далее, рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, и случайный процесс

$$X_k = u + Y_1 + \cdots + Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Из обсуждения примера 2.5 вытекает, что X_k, $k = 1, 2, \ldots$ является процессом с независимыми приращениями. Процессы такого типа называются также **случайными блужданиями**. Блуждание начинается в состоянии u, а затем за последовательные периоды времени переходит в состояния $u+Y_1$, $u+Y_1+Y_2$ и т.д.; величина изменения (приращения) за k-й период времени описывается случайной величиной Y_k.

Если значение u целочисленно, а случайные величины Y_k, $k = 1, 2, \ldots$ принимают только целочисленные значения, то блуждание происходит по целочисленным точкам. Мы будем рассматривать здесь только такой случай и интерпретировать его, как миграцию по кредитным категориям. Более того, ограничимся распределением Y_1 (а, значит, и остальных Y_k, $k = 2, 3, \ldots$) вида

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1) = p, \;\; \mathbf{P}(Y_1 = -1) = q, \;\; \mathbf{P}(Y_1 = 0) = 1 - p - q. \tag{28}$$

Здесь p, q — параметры, удовлетворяющие условиям $p \geq 0, \; q \geq 0, \; p + q \leq 1$.

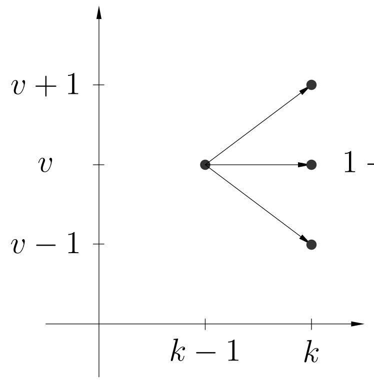


Рис. 4: Миграция за 1 период времени

Описанный процесс можно интерпретировать следующим образом. В момент выдачи кредита $t = 0$ заемщик находится в кредитной категории u, а в течение первого промежутка времени между моментами $t = 0$ и $t = 1$ он переходит в более высокую соседнюю категорию $u + 1$ с вероятностью p, в более низкую соседнюю категорию $u - 1$ с вероятностью q, или остается в категории u с вероятностью $1 - p - q$. Аналогично, если в момент времени $t = k - 1$ в начале k-го периода времени заемщик находился в состоянии v, то в конце этого периода, в момент времени $t = k$, он с вероятностью p оказывается в состоянии $v+1$, с вероятностью q — в состоянии $v-1$, и с вероятностью $1 - p - q$ остается в том же состоянии v, см. рис. 4.

Переходы в различные периоды времени осуществляются независимо друг от друга (ввиду независимости случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$), однако состояния в конце различных периодов оказываются зависимыми. В данном случае возможны все (в том числе — отрицательные) категории из множества целых чисел

$$\mathbf{N} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Более реалистичная (и более сложная) модель с конечным числом категорий рассматривается в п. 4.2.

4.1.2 Пространство элементарных исходов

Модель рассматриваемого процесса можно представить в следующем виде. Пространство элементарных исходов Ω_u состоит из траекторий, описываемых последовательностями вида $(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$, где $a_k \in \mathbf{N}$, причем $a_0 = u$ и $|a_k - a_{k-1}| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Множество всех таких траекторий имеет мощность континуума (см. упр. 9). Пространства, построенные для различных начальных состояний u, являются точными вероятностными копиями друг друга. Поэтому построение достаточно провести для какого-либо фиксированного значения u, например $u = 0$. Выводы для всех других значений u получаются простым сдвигом "по вертикали" на значение начальной категории u. Другими словами, вместо процесса (27) мы рассматриваем процесс

$$Z_k = Y_1 + \cdots + Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

траектории которого имеют вид $(0, a_1, a_2, \ldots)$ с $a_k \in \mathbf{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, и в совокупности образуют Ω_0. При $u \ne 0$ между Ω_0 и Ω_u естественно устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Именно, каждой траектории $(0, a_1, a_2, \ldots) \in \Omega_0$ соответствует траектория $(u, u + a_1, u + a_2, \ldots) \in \Omega_u$, а любой траектории $(u, b_1, b_2, \ldots) \in \Omega_u$ соответствует траектория $(0, b_1 - u, b_2 - u, \ldots) \in \Omega_0$.

4.1.3 σ-алгебра событий

Построим σ-алгебру $\mathcal{A}_0$ событий в Ω_0. Для момента времени $k \in \mathcal{T}$ и состояния $v \in \mathbf{N}$ обозначим $A_0(k, v)$ событие "в момент времени k заемщик находится в состоянии v" (т.е., $Z_k = v$). Другими словами, это событие состоит из всевозможных траекторий $(0, a_1, \ldots)$, у которых $a_k = v$. В частности, при $v \ne 0$ получаем $A_0(0, v) = \emptyset$, и, вообще $A_0(k, v) \ne \emptyset$ только при $|v| \le k,\ k = 0, 1, \ldots$. Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \{A_0(k, v);\ \ k = 0, 1, \ldots;\ v \in \mathbf{N}\}$$

совокупность всех событий такого типа, и в качестве σ-алгебры $\mathcal{A}_0$ будем использовать наименьшую σ-алгебру, содержащую все события из $\widetilde{\mathcal{A}}_0$.

4.1.4 Вероятностная мера

Перейдем к построению вероятностной меры на $\mathcal{A}_0$. Выберем произвольное событие $A_0(k, v) \in \widetilde{\mathcal{A}}_0$ с $|v| \le k$ и вычислим его вероятность. Из построения процесса ясно, что за время k из состояния 0 можно перейти в состояния v, удовлетворяющие условиям $-k \le v \le k$, а распределение вероятностей является триномиальным (см. п. 2.5), т.е., вероятность события $A_0(k,v)$ вычисляется по формуле $\mathbf{P}_0(A_0(k,v)) = B_3(k,v)$, где функция B_3 определена в (16). Тем самым, вероятности всех событий из $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ заданы, а задание вероятностной меры на всей σ-алгебре $\mathcal{A}_0$ получается стандартной процедурой продолжения вероятностной меры на порожденную σ-алгебру [3].

4.1.5 Перенос по вертикали

Таким образом, построено вероятностное пространство $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbf{P}_0)$. При $u \neq 0$ упомянутое ранее взаимно-однозначное соответствие между Ω_0 и Ω_u позволяет переносить все построение на вероятностное пространство $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbf{P}_u)$ (сдвигать процесс "по вертикали", по оси категорий). Например, событие $A_0(k,v) \in \mathcal{A}_0$ имеет точную вероятностную копию: событие $A_u(k,u+v) \in \mathcal{A}_u$; вероятности этих событий совпадают: $\mathbf{P}_0(A_0(k,v)) = \mathbf{P}_u(A_u(k,u+v))$. И наоборот, событие $A_u(k,v) \in \mathcal{A}_u$ имеет точную вероятностную копию $A_0(k,v-u) \in \mathcal{A}_0$, и вероятности этих событий совпадают: $\mathbf{P}_u(A_u(k,u)) = \mathbf{P}_0(A_0(k,v-u))$.

Вероятность события $A_u(k,v) \in \mathcal{A}_u$ обозначим

$$P_{u,k}(v) = \mathbf{P}_u(A_u(k,v)), \quad k \in \mathcal{T};\ v \in \mathbf{N},\ |v-u| \le k. \tag{30}$$

4.1.6 Перенос по горизонтали

При произвольном $l \ge 0$ поведение "хвоста" процесса

$$Z'_k = Y_{l+1} + \cdots + Y_{l+k},$$

очевидно, является копией поведения процесса (29), что позволяет сдвигать процесс "по горизонтали" (по временнóй оси).

Для начального состояния $u \in \mathbf{N}$, состояний $v, w \in \mathbf{N}$ и моментов времени $k, l = 0, 1, \ldots$ с $k < l$ рассмотрим события $A_u(k,v),\ A_u(l,w) \in \mathcal{A}_u$. Их пересечение $A_u(k,v) \cap A_u(l,w)$ образует событие с интерпретацией "за время от k до l заемщик перешел из категории v в категорию w". Обозначим такое событие перехода

$$M_u(k,v;l,w) = A_u(k,v) \cap A_u(l,w); \quad k,l \in \mathcal{T},\ k \le l; \quad u,v \in \mathbf{N}. \tag{31}$$

Другими словами, это событие состоит из всех последовательностей (элементарных исходов) $(u, a_1, \ldots) \in \Omega_u$, у которых $a_k = v$ и $a_l = w$. То же можно выразить так: "за промежуток времени продолжительностью $l-k$ изменение состояния процесса составило $w-v$". Действительно, оба события можно представить в виде $(Y_{k+1} + \cdots + Y_l = w - v)$. Вероятность таких событий не зависит от k, l, u, v, w и определяется только значениями разностей $l-k > 0$ и $w-v$. Эта вероятность, очевидно, совпадает с вероятностью события $(Y_1 + \cdots + Y_{l-k} = w - v) = A_0(l-k, w-v) \in \Omega_0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(M_u(k,v;l,w)) = \mathbf{P}_u(A_u(k,v) \cap A_u(l,w)) = \mathbf{P}_0(A_0(l-k,w-v)); \\ A_u(k,v), A_u(l,w) \in \Omega_u,\ A_0(l-k,w-v) \in \Omega_0. \end{gathered} \tag{32}$$

4.1.7 Уравнения для вероятностей событий

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbf{P}_u)$ и установим связь между событиями $A_u(k,v)$ в соседние моменты времени $k-1$ и k, а также между вероятностями этих событий.

Зафиксируем значения $k, v \in \mathbf{N}$ и рассмотрим сначала случай $u - k + 2 \le v \le u + k - 2$. При этом событие $A_u(k, v)$ может реализоваться одним из трех следующих взаимоисключающих способов.

1. В момент времени $k - 1$ заемщик находился в состоянии $v + 1$ (то есть, имело место событие $A_u(k - 1, v + 1)$), и перешел к моменту времени k в состояние v (что при условии $A_u(k-1, v+1)$ соответствует перемещению на одну категорию вниз и происходит с вероятностью q).

2. В момент времени $k - 1$ заемщик находился в состоянии $v - 1$ (то есть, имело место событие $A_u(k - 1, v - 1)$), и к моменту времени k перешел в состояние v (что при условии $A_u(k-1, v-1)$ соответствует перемещению на одну категорию вверх и происходит с вероятностью p).

3. В момент времени $k-1$ заемщик находился в состоянии v (то есть, имело место событие $A_u(k - 1, v)$), и к моменту времени k остался в состоянии v (что при условии $A_u(k - 1, v)$ происходит с вероятностью $1 - p - q$).

Другие исходы невозможны. Поэтому $A_u(k, v) \subseteq A_u(k - 1, v + 1) + A_u(k - 1, v) + A_u(k - 1, v - 1)$, и по формуле полной вероятности (10) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u(A_u(k, v)) = \mathbf{P}_u(A_u(k, v) \,|\, A_u(k - 1, v - 1))\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v - 1)) +\\ +\mathbf{P}_u(A_u(k, v) \,|\, A_u(k - 1, v))\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v)) +\\ +\mathbf{P}_u(A_u(k, v) \,|\, A_u(k - 1, v + 1))\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v + 1)) =\\ = p\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v - 1)) + (1 - p - q)\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v)) + q\mathbf{P}_u(A_u(k - 1, v + 1)),\end{aligned}$$

или, с учетом обозначения (30),

$$P_{u,k}(v) = pP_{u,k-1}(v - 1) + (1 - p - q)P_{u,k-1}(v) + qP_{u,k-1}(v + 1). \tag{33}$$

Иллюстрация вывода уравнения (33) приведена на рис. 5.

В случае $|v - u| \le k - 2$, $k \ge 2$ все условия в (33) возможны, а их вероятности положительны. При $|v - u| \ge k - 1$ некоторые условия становятся невозможными, так что их вероятности обращаются в нуль, и правая часть (33) становится короче. Рассмотрим случай $|v - u| = k - 1$. Здесь возможны два варианта, приводящие к различным уравнениям связи вероятностей. Вариант $v = u + k - 1$ показан на рис. 5. При этом

$$P_{u,k}(u + k - 1) = pP_{u,k-1}(u + k - 2) + (1 - p - q)P_{u,k-1}(u + k - 1). \tag{34}$$

Вариант $v = u - k + 1$ получается симметрично:

$$P_{u,k}(u - k + 1) = qP_{u,k-1}(u - k + 2) + (1 - p - q)P_{u,k-1}(u - k + 1). \tag{35}$$

Случай $|v-u| = k$ состоит также из двух вариантов, в каждом из которых имеется единственная возможность перехода, что приводит к уравнениям

$$P_{u,k}(u + k) = pP_{u,k-1}(u + k - 1) \tag{36}$$

и

$$P_{u,k}(u - k) = qP_{u,k-1}(u - k + 1). \tag{37}$$

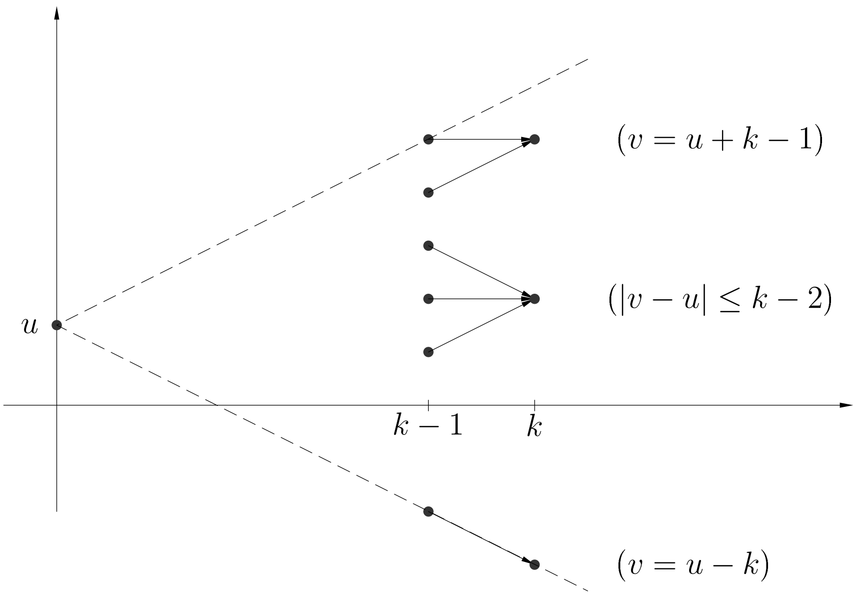


Рис. 5: Иллюстрация уравнения для вероятностей событий

Второй из этих вариантов также проиллюстрирован на рис. 5.

Начальные условия для вычислений по формулам (33) — (37) имеют вид

$$P_{u,0}(v) = \delta_{uv};\ u, v \in \mathbf{N}, \tag{38}$$

где δ_{uv} —символ Кронекера

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

4.2 Бесконечный горизонт времени

4.2.1 Описание модели

В данном пункте ограничим число возможных состояний процесса множеством целых чисел $\mathbf{N}_m = \{0, 1, \ldots, m\}$ и будем называть элементы этого множества кредитными категориями. Категория 0 соответствует дефолту (неплатежеспособности), а категория m — наилучшему финансовому состоянию. Промежуточные категории занумерованы таким образом, что категория с бóльшим номером соответствует лучшему финансовому положению заемщика.

Миграцию заемщика по категориям будем описывать следующим образом. Если в начале текущего периода времени заемщик находился в категории j, $j = 1, \ldots, m-1$, то в течение этого периода он с вероятностью p переходит в следующую категорию $j+1$, с вероятностью q переходит в предыдущую категорию $j-1$, а с вероятностью $1 - p - q$ остается в той же категории j. Параметры p, q должны удовлетворять условиям $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq 1$. Если заемщик попадает в категорию $j = 0$, то он остается в ней на все оставшееся время (дефолт). При попадании в категорию $j = m$ заемщик также остается в ней на все оставшееся время[3]. Такие категории

[3]Возможны варианты этой модели. Например, можно считать, что заемщик переходит из m в предыдущее состояние с прежней вероятностью q, и остается в текущем состоянии m с вероятностью

(состояния) в теории случайных процессов называются **поглощающими**. Вероятности перехода p, q не зависят от номера текущей категории j (за исключением крайних случаев $j = 0$, $j = m$), а также предыстории процесса[4].

Итак, моделью процесса X_k, $k \in \mathcal{T}$ в данном случае является семейство вероятностных пространств $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbf{P}_u)$, $u \in \mathbf{N}_m$ с очевидными изменениями правил перехода, вызванными появлением поглощающих состояний.

4.2.2 Уравнение для вероятностей состояний

Уравнения связи вероятностей состояний (33) — (37) принимают в данной модели следующий вид:

$$\begin{gathered} P_{u,k}(v) = pP_{u,k-1}(v-1) + (1-p-q)P_{u,k-1}(v) + qP_{u,k-1}(v+1), 1 < v < m-1, \\ P_{u,k}(1) = (1-p-q)P_{u,k-1}(1) + qP_{u,k-1}(2), \\ P_{u,k}(m-1) = pP_{u,k-1}(m-2) + (1-p-q)P_{u,k-1}(m-1), \\ P_{u,k}(m) = pP_{u,k-1}(m-1) + P_{u,k-1}(m), \\ P_{u,k}(0) = P_{u,k-1}(0) + qP_{u,k-1}(1). \end{gathered} \tag{39}$$

с начальными условиями

$$P_{u,0}(v) = \delta_{uv}; \ u, v \in \mathbf{N}_m. \tag{40}$$

4.2.3 Расширенное пространство

Чтобы иметь возможность сравнения характеристик процесса при различных начальных состояниях u, полезно параллельно рассматривать расширенную модель $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Здесь $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \cdots, \Omega_n$, σ-алгебра $\mathcal{A}$ порождена всевозможными событиями $A(k, v) = (X_k = v)$, $v \in \mathbf{N}_m$, $k \in \mathcal{T}$, содержательно означающими, что в момент времени k процесс попал в состояние v. Ясно, что

$$A(k, v) = A_0(k, v) + A_1(k, v) + \cdots + A_m(k, v). \tag{41}$$

Зададим начальное распределение произвольным образом положительными вероятностями $p_0, p_1, \ldots, p_m$, $p_0 + \cdots + p_m = 1$:

$$\mathbf{P}(A(0, u)) = p_u, \ u \in \mathbf{N}_m.$$

Тогда $A_u(k, v) = A(k, v) \cap A(0, u)$, так что

$$\mathbf{P}(A_u(k, v)) = \mathbf{P}(A(k, v) \cap A(0, u)) = \mathbf{P}(A(k, v) \,|\, A(0, u))\mathbf{P}(A(0, u)) = \mathbf{P}_u(A_u(k, v))p_u,$$

и из (41) получаем

$$\mathbf{P}(A(k, v)) = \sum_{u=0}^{m} \mathbf{P}(A_u(k, v)) = \sum_{u=0}^{m} \mathbf{P}_u(A_u(k, v))p_u; \ \ k \in \mathcal{T}, \ v \in \mathbf{N}_m.$$

$1 - q$. Взаимосвязи в такой модели и, следовательно, схема расчетов, немного изменяются, см. упр. 10.

[4]Более сложная модель с переменными вероятностями перехода образует *нестационарную цепь Маркова* с конечным числом состояний.

Таким образом, вероятности $\mathbf{P}(A(k,v))$ определены, а продолжение меры на порожденную σ-алгебру $\mathcal{A}$ строится обычным образом. В частности, по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{u=0}^{m} \mathbf{P}_u(A \mid A(0,u))p_u, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что для произвольного события $A \in \mathcal{A}_u$ вероятность в его "родном" пространстве $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbf{P}_u)$ совпадает с условной вероятностью в расширенном пространстве, при условии, что начальное состояние равнялось u:

$$\mathbf{P}_u(A) = \mathbf{P}(A \mid A(0,u)) = \frac{\mathbf{P}(A)}{p_u}, \quad A \in \mathcal{A}_u.$$

4.2.4 Уравнение для вероятности дефолта

Особый интерес для приложений представляет вероятность попадания в состояние 0 (дефолт). Для $u \in \mathbf{N}_m$ событие дефолта в пространстве $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbf{P}_u)$ имеет вид

$$D(u) = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_u(k,0),$$

то есть, включает все траектории из Ω_u, попадающие при некотором $k \in \mathcal{T}$ в состояние 0. В расширенном пространстве это событие описывается посредством

$$D(0,u) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A(0,u) \cap A(k,0)),$$

т.е., как совокупность всех траекторий, в начальный момент времени находившихся в состоянии u, а в некоторый момент времени k попавших в состояние 0. Рассмотрим также более общее событие дефолта при условии, что в некоторый момент времени $l \in \mathcal{T}$ процесс находился в состоянии u:

$$D(l,u) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A(l,u) \cap A(l+k,0)).$$

Ввиду стационарности процесса (независимости его характеристик от времени) ясно, что вероятность дефолта не зависит от l и равна

$$Q_u = \mathbf{P}(D(l,u)) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(A(l,u) \cap A(l+k,0)). \tag{42}$$

Выведем разностное уравнение для вероятности дефолта. Пусть сначала $0 < u < m$. Тогда событие дефолта $D(0,u)$ влечет за собой наступление одного из трех взаимоисключающих событий.

1. В течение первого периода времени произошло перемещение в следующую категорию $u+1$ (наступило событие $M_u(0,u;1,u+1) = A(0,u) \cap A(1,u+1)$) и затем наступил дефолт (реализовалось событие $D(1,u+1)$);

2. В течение первого периода времени произошло перемещение в предыдущую категорию $u-1$ (наступило событие $M_u(0,u;1,u-1) = A(0,u) \cap A(1,u-1)$) и затем наступил дефолт (реализовалось событие $D(1,u-1)$);

3. В течение первого периода времени произошло перемещение в текущую категорию u (наступило событие $M_u(0,u;1,u) = A(0,u) \cap A(1,u)$) и затем наступил дефолт (реализовалось событие $D(1,u)$).

Формально это означает

$$D(0,u) \subseteq M_u(0,u;1,u+1) + M_u(0,u;1,u-1) + M_u(0,u;1,u).$$

Поскольку, очевидно,

$$\mathbf{P}(M_u(0,u;1,u+1)) = p, \;\; \mathbf{P}(M_u(0,u;1,u-1)) = q, \;\; \mathbf{P}(M_u(0,u;1,u)) = 1-p-q,$$

по формуле полной вероятности заключаем

$$\mathbf{P}(D(0,u)) = p\mathbf{P}(D(1,u+1)) + (1-p-q)\mathbf{P}(D(1,u)) + q\mathbf{P}(D(1,u-1)).$$

Используя (42), отсюда получаем

$$Q_u = pQ_{u+1} + (1-p-q)Q_u + qQ_{u-1},$$

т.е.,

$$Q_{u+1} - \frac{p+q}{p}\,Q_u + \frac{q}{p}\,Q_{u-1} = 0, \;\; 0 < u < m. \tag{43}$$

При $u = 0$ событие дефолта достоверно, а при $u = m$ событие дефолта невозможно (оба состояния являются поглощающими), поэтому

$$Q_0 = 1, \;\; Q_m = 0. \tag{44}$$

Уравнение (43) с краевыми условиями (44) допускает эффективное решение, которое мы получим в следующем пункте.

4.2.5 Решение уравнения для вероятности дефолта

Разностное уравнение (43) с краевыми условиями (44) можно решить методом характеристического уравнения, см., напр. [4, §6]. Характеристическое уравнение для (43) имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{p+q}{p}\,\lambda + \frac{q}{p} \; = 0. \tag{45}$$

При $p \neq q$ это уравнение имеет два различных вещественных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = (q/p)$. Обозначим $y = q/p$, так что $\lambda_2 = y$. Общее решение уравнения (43) имеет вид

$$Q_u = C_1\lambda_1^u + C_2\lambda_2^u = C_1 + C_2 y^u,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (44):

$$C_1 = -\frac{y^m}{1-y^m}\;, \quad C_2 = \frac{1}{1-y^m}\;,$$

откуда

$$Q_u = \frac{y^u - y^m}{1-y^m}\;, \quad (p \neq q, \; y = \frac{q}{p} \neq 1). \tag{46}$$

При $p = q$ $(y = 1)$ характеристическое уравнение имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = 1$, поэтому общее решение уравнения (43) ищется в виде

$$Q_u = (C_1 + C_2 u)\lambda_1^u = C_1 + C_2 u,$$

где произвольные постоянные определяются из краевых условий (44):

$$C_1 = 1,\ C_2 = -\frac{1}{m}\ ,$$

откуда

$$Q_u = 1 - \frac{u}{m}\ , \quad (p = q,\ y = \frac{q}{p} = 1). \tag{47}$$

Выражения (46) и (47) дают полное решение уравнения (43) с краевыми условиями (44) при любых допустимых значениях параметров p, q. На рис. 6.а приведен график зависимости вероятности дефолта от номера начальной категории u при значениях параметров $m = 10$, $p = 0.5$, $q = 0.3$. Здесь $y = 3/5 < 1$. На рис. 6.б показан аналогичный график для значений параметров $m = 10$, $p = 0.3$, $q = 0.5$. Здесь $y = 5/3 > 1$. При $p = q$ зависимость Q_u от u линейна, в иллюстрации необходимости

а) $p = 0.5$, $q = 0.3$, $y = 3/5$

б) $p = 0.3$, $q = 0.5$, $y = 5/3$

Рис. 6: Графики Q_u на бесконечном горизонте времени, $m = 10$

нет. Отметим, что выражение (47) можно получить непосредственно из (46) предельным переходом при $y \to 1$, см. упр. 11. В табл. 4 приведены численные значения вероятности дефолта при $m = 10$, $y = 3/5, 1, 5/3$ и $u = 0, 1, \ldots, m$.

Таблица 4: Вероятности дефолта на бесконечном горизонте времени

y	u										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3/5	1	0.598	0.356	0.211	0.124	0.072	0.041	0.022	0.011	0.004	0
1	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
5/3	1	0.996	0.989	0.978	0.959	0.928	0.876	0.789	0.644	0.402	0

Теперь нетрудно вычислить и вероятности поглощения процесса состоянием m при условии старта в состоянии u. Из соображений симметрии ясно, что выражение для такой вероятности получается из (46) и (47) заменой p на q, q на p (т.е. y на y^{-1}) и u на $m-u$. Проделав такие замены, получаем для вероятностей S_u окончания процесса в поглощающем состоянии m:

$$S_u = \frac{1-y^u}{1-y^m}, \quad p \neq q \quad (y \neq 1)$$

и

$$S_u = \frac{u}{m}, \quad p = q \quad (y = 1).$$

Видно, что при любых значениях параметров $Q_u + S_u = 1$, а это означает, что с вероятностью 1 процесс за конечное время поглощается состоянием 0 или состоянием m, а вероятность бесконечной продолжительности процесса равна 0, несмотря на бесконечность временного горизонта.

4.2.6 Бесконечное число категорий

Если число категорий m велико, то хорошее приближение для вероятности дефолта можно получить, рассмотрев предел (46), (47) при $m \to \infty$.

В случае $p = q$ из (47) получаем

$$\lim_{m\to\infty} Q_u = 1.$$

Это означает, что с увеличением числа категорий вероятность дефолта сколь угодно близко приближается к единице. Этот результат легко интерпретируется. Ввиду симметрии переходов ($p = q$) удаление верхней поглощающей категории повышает шансы на дефолт (ведь временнóй горизонт не ограничен!).

Аналогичный результат получается из (46) при $p < q$ ($y > 1$). В этом случае переходы "вниз" (в направлении состояния дефолта) более вероятны, что и обеспечивает (в отсутствие поглощения сверху) на бесконечном горизонте времени дефолт с вероятностью 1.

При $p > q$ ($y < 1$), когда переходы вверх более вероятны, чем переходы вниз, получается качественно иной результат

$$\lim_{m\to\infty} Q_u = y^u = e^{u \ln y}.$$

В этом случае вероятность дефолта меньше 1 для положительных начальных категорий, и экспоненциально убывает (т.к. $\ln y < 0$) с ростом номера начальной категории. В случае такой асимметрии процесса заемщики, имеющие достаточно высокую начальную кредитную категорию, имеют существенные шансы на возврат кредита даже на бесконечном горизонте времени.

4.3 Конечный горизонт времени

В данном пункте мы перейдем на следующий уровень сложности. Кроме конечности множества состояний $\mathbf{N} = \{0, 1, \ldots, m\}$ мы будем предполагать также конечность временного горизонта, т.е., будем полагать $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$. В п. 4.2 нам не удалось воспользоваться сдвигами по "вертикали" что привело к необходимости решать разностные уравнения, что, впрочем, оказалось реализуемым аналитически, в замкнутом виде. В настоящем пункте соответствующие уравнения еще более усложняются, найти их аналитическое решение, воспользовавшись сдвигами "по горизонтали", не удается. Решать уравнения придется численными методами.

Итак, рассмотрим модель, описанную в п. 4.1.1, с тем отличием, что множество моментов времени $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ конечно. Уравнения для вероятностей состояний (39) с начальными условиями (40) сохраняются, но используются только при $k = 1, 2, \ldots, T$. На рис. 7 представлена поверхность, иллюстрирующая динамику развития распределения по состояниям во времени.

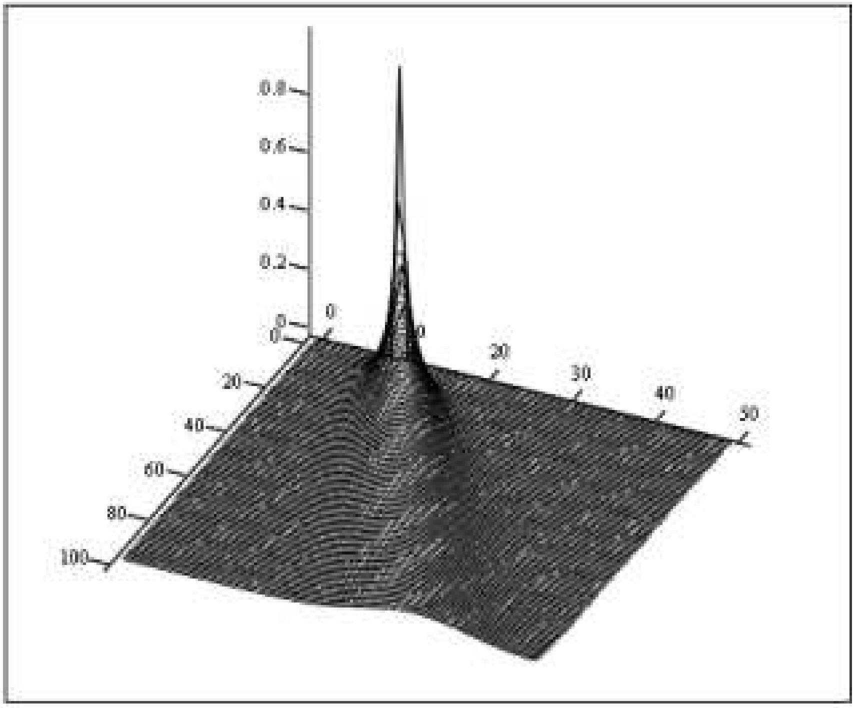


Рис. 7: Изменение распределения по состояниям с течением времени; $p = 0.35$, $q = 0.1$, $m = 50$, $T = 100$, $u = 10$

Уравнение для вероятности дефолта не сохраняется; в данной модели уже нет инвариантности характеристик процесса относительно сдвигов "по горизонтали". Элементарные исходы (траектории) представляют собой конечные последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_T)$ элементов $a_k \in \mathbf{N}_m$, $k \in \mathcal{T}$. Для фиксированных $k \in \mathcal{T}$, $v \in \mathbf{N}_m$ обозначим $A(k, v)$ событие $X_k = v$ (в момент времени k процесс находится в состоянии v). Это событие включает все последовательности с $a_k = v$. Далее, для $k \leq l$ обозначим $M(k, u; l, v) = A(k, u) \cap A(l, v)$ событие перехода за время от k до l из состояния u в состояние v. Кроме того, обозначим $D(l, u)$ событие "дефолт при условии, что в момент времени l процесс находился в состоянии u":

$$D(l, u) = \bigcup_{k=0}^{T-l} (A(l, u) \cap A(l + k, 0)) = \bigcup_{k=0}^{T-l} M(l, u; l + k, 0)$$

и $Q(l, u) = \mathbf{P}(D(l, u))$.

Уравнение для вероятности дефолта получается следующим образом. Для $0 < u < m$ и $0 \le k < T$ имеем

$$D(k,u) \subseteq M(k,u;k+1,u+1) + M(k,u;k+1,u) + M(k,u;k+1,u-1).$$

Применяя к этому включению формулу полной вероятности (10), получаем

$$Q(k,u) = pQ(k+1,u+1) + (1-p-q)Q(k+1,u) + qQ(k+1,u-1). \tag{48}$$

Соотношение (48) представляет собой разностное уравнение относительно функции двух переменных k, u, $0 \le k \le T$, $0 \le u \le m$ на целочисленной сетке, пример которой для случая $m = 3$, $T = 4$ приведен на рис. 8. Для решения уравнения необходимо

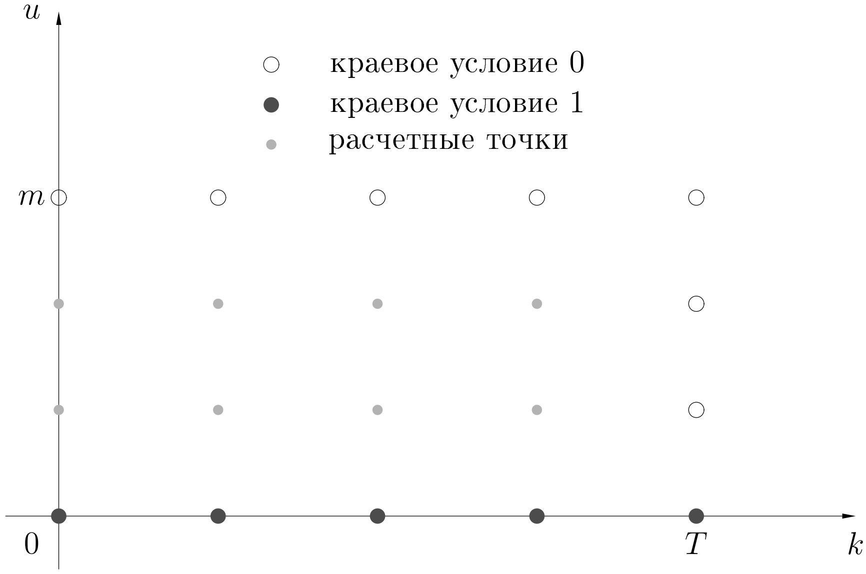


Рис. 8: Сетка для решения уравнения (48) с краевыми условиями (49), (50)

задать краевые условия, которые в данном случае имеют вид

$$Q(k,0) = 1,\ Q(k,m) = 0,\ k = 0,1,\dots,T, \tag{49}$$

поскольку состояния 0 и m являются поглощающими, и

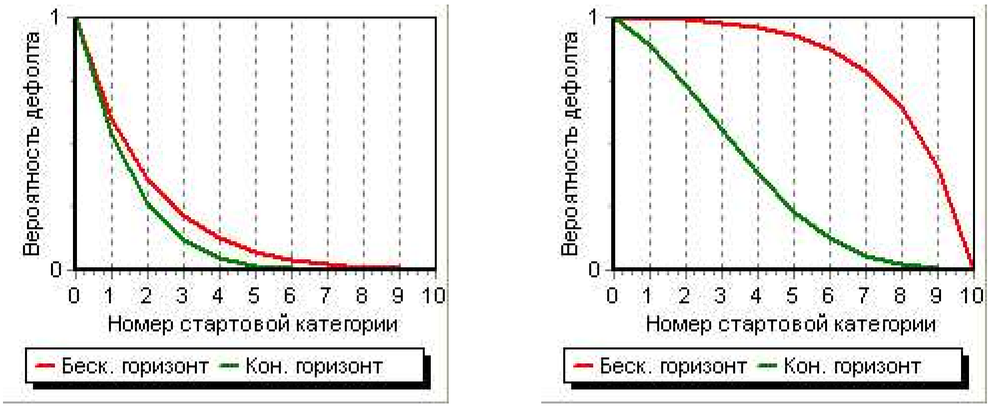
$$Q(T,u) = 0,\ u = 1,2,\dots,m-1, \tag{50}$$

поскольку T является последним моментом времени в данной модели. Краевые условия показаны на рис. 8 кругами большего радиуса.

Решение уравнения (48) производится справа налево, то есть, сначала вычисляются все значения $Q(T-1,u)$, $u = 1,\dots,m-1$, а затем аналогично $Q(k,u)$ для $k = T-2, T-3, \dots, 0$.

На рис. 9 представлены графики вероятности дефолта на конечном ($T = 10$) и бесконечном горизонтах времени при тех же значениях параметров, что и на рис. 6. Численные значения вероятностей дефолта на конечном горизонте времени приведены в табл. 5.

Программная иллюстрация модели настоящего параграфа представлена в [7].



а) $p = 0.5$, $q = 0.3$, $y = 3/5$ б) $p = 0.3$, $q = 0.5$, $y = 5/3$

Рис. 9: Графики Q_u на конечном ($T = 10$) и бесконечном горизонтах времени, $m = 10$

Таблица 5: Вероятности дефолта на конечном горизонте времени $T = 10$

p, q	u										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0.5, 0.3$	1	0.531	0.263	0.120	0.049	0.018	0.006	0.002	0.000	0.000	0
$0.3, 0.5$	1	0.885	0.730	0.554	0.380	0.232	0.124	0.056	0.020	0.005	0

5 Процессы с независимыми приращениями

Рассмотреть агрегированный процесс риска [5], вычисление вероятности разорения (дефолта) методами разностных уравнений [5] и цепей Маркова [10].

6 Заключение

Модель, рассмотренная в §4, может быть использована при решении следующих прикладных задач:

- прогнозирование динамики финансового состояния заемщика в момент выдачи ему кредита $k = 0$; формирование резервов для покрытия кредитного риска;
- мониторинг финансового состояния заемщика в течение срока действия кредита; вычисление вероятности дефолта в оставшийся период на основании информации, доступной в момент времени k, $k = 1, 2, \ldots, T-1$; изменение размера резерва;

Продолжить ...

7 Упражнения

Упражнение 1 Доказать, что n событий разбивают пространство элементарных исходов Ω на 2^n террасок (некоторые из которых могут оказаться пустыми), см.

замечание 2.1 на с.4.

Упражнение 2 Доказать формулу полной вероятности из леммы 2.5.

Упражнение 3 Выписать состав множеств индексов суммирования в формуле (15) для случая $n = 5$.

Упражнение 4 Написать программу для вычисления триномиальных вероятностей $B_3(n, y)$, $-n \leq y \leq n$ по формулам (15), (16) для произвольных значений параметров $n = 1, 2, \ldots, 100$ и p, $q \geq 0$, $p + q \leq 1$.

Упражнение 5 Показать, что процесс, заданный в табл. 3, является марковским.

Упражнение 6 Доказать, что в примере 2.5 построен процесс $(X_t,\ t \in \mathcal{T})$ с независимыми приращениями.

Упражнение 7 Преобразовать процесс из примера 2.2 в марковский процесс методом пункта 2.7.

Упражнение 8 Проверить непосредственным суммированием, что сумма вероятностей всех $n + 1$ элементарных исходов в (26) равна 1.

Упражнение 9 Доказать, что пространство элементарных исходов в модели п. 4.1 имеет мощность континуума. (*Указание*: установите взаимно-однозначное соответствие между Ω и отрезком $[0, 1]$, используя троичные разложения чисел $\alpha \in [0, 1]$).

Упражнение 10 Вывести уравнения, связывающие вероятности событий в модели блуждания на бесконечном горизонте времени (п. 4.2), аналогичные уравнениям (39), для случая непоглощающего верхнего состояния m.

Упражнение 11 Вывести (47) из (46), рассмотрев предел при $y \to 1$.

Список литературы

[1] Воробьев О.Ю. (2004) О понятии независимости событий относительно разбиения пространства элементарных исходов. *Частное сообщение.*

[2] Колмогоров А.Н. (1974) *Основные понятия теории вероятностей.* М.: Наука., 120 с.

[3] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд-во иностр. литер., 762 с.

[4] Новоселов А.А. (1998) Избранные лекции по моделированию финансовых рисков. 30 с., http://anov.narod.ru/lectures.htm#MFRRus

[5] Новоселов А.А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения.* Наука: Новосибирск, 102 с.

[6] Новоселов А.А. (2003) Границы Фреше. *Избранные темы теории вероятностей.* http://anov.narod.ru/topics/frechet.htm

[7] Новоселов А.А. (2006) Программная иллюстрация к настоящей лекции. http://anov.narod.ru/download.htm#depIndep

[8] Фаррахов И.Т. (2006) Обоснование формулы кумулятивной вероятности в схеме независимых испытаний. *Частное сообщение.* http://dom.bankir.ru/showthread.php?t=56070

[9] Феллер В. (1984) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **1**, М.: Мир, 528 с.

[10] Чанчикова О.В. (1999) Исследование агрегированного процесса риска методом цепей Маркова. *Дипломная работа*, Красноярск, КрасГУ, 18 с.