Соответствия

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

В лекции рассматривается понятие соответствия, обобщающего понятие функции, а также связанные с ним понятия поляры и компоненты. Изучаются свойства этих объектов и их связь с понятием отношения. Основная часть материала почерпнута из монографии [1].

1 Соответствие

Определение 1.1 *Пусть* X, Y *– произвольные множества. Соответствием* $\Phi : X \to Y$ *называется произвольное подмножество* $\Phi \subseteq X \times Y$.

В частном случае, когда каждый элемент $x \in X$ входит не более, чем в одну пару $(x, y) \in \Phi$, получается обычное однозначное отображение из X в Y, или *функция*. Таким образом, понятие соответствия обобщает понятие функции.

Рассмотрим пример соответствия. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Декартово произведение $X \times Y$ показано на следующем рисунке в виде прямоугольной таблицы, а элементы $\Phi = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$ представлены заполненными точками.

y_4	○	○	○
y_3	○	●	○
y_2	○	●	○
y_1	●	●	○
	x_1	x_2	x_3

Рис. 1: Пример соответствия

Образом $\Phi(A)$ множества $A \subseteq X$ при соответствии Φ называется множество

$$\Phi(A) = \{y \in Y |\ \exists x \in A : \ (x, y) \in \Phi\}$$

точек $y \in Y$, входящих в Φ в паре с некоторым $x \in A$. Для $x \in X$ образ одноточечного множества будем также обозначать $\Phi(\{x\}) = \Phi(x)$.

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_3 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
x_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\
x_1 & \bullet & \circ & \circ & \circ \\
\hline
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4
\end{array}
$$

Рис. 2: Пример обратного соответствия

Обратным к Φ соответствием $\Phi^{-1}: \ Y \to X$ называется подмножество $\Phi^{-1} \subseteq Y \times X$, определяемое следующим образом:

$$\Phi^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X | \ (x, y) \in \Phi\}.$$

Соответствие, обратное к изображенному на рисунке 1, показано на рисунке 2, который, очевидно, является "транспонированной"версией рисунка 1. Образ $\Phi^{-1}(B)$ множества $B \subseteq Y$ при соответствии Φ^{-1} называют также *прообразом* B при соответствии Φ. Для обозначения прообразов одноточечных множеств $\{y\}$ используется то же соглашение, что и для образов: $\Phi^{-1}(\{y\}) = \Phi^{-1}(y), \ y \in Y$.

Понятие соответствия оказывается особенно удачным в том смысле, что обратное соответствие всегда существует, и $\left(\Phi^{-1}\right)^{-1} = \Phi$.

Как видно из рассмотренных примеров, некоторые элементы $x \in X$ могут иметь пустые образы при соответствии Φ, и, аналогично, для некоторых $y \in Y$ возможно $\Phi^{-1}(y) = \emptyset$. Поэтому являются содержательными понятия *области определения* $\mathcal{D}(\Phi)$ и *области значений* $\mathcal{R}(\Phi)$ соответствия Φ, задаваемые посредством

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{x \in X | \ \exists y \in Y: \ (x, y) \in \Phi\}, \quad \mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{D}(\Phi^{-1}).$$

В рассмотренных на рисунках 1, 2 примерах $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{R}(\Phi^{-1}) = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{D}(\Phi^{-1}) = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Множества X, Y называются *областью отправления* и *областью прибытия* Φ, соответственно. В большинстве случаев можно без ущерба для существа дела избавиться от "лишних"точек, и считать $X = \mathcal{D}(\Phi)$, $Y = \mathcal{R}(\Phi)$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Для подмножества $Z \subseteq X$ сужением соответствия Φ на Z называется соответствие $\Phi|_Z: \ Z \to \Phi(Z)$, задаваемое соотношением $\Phi|_Z = \{(x, y) \in \Phi | \ x \in Z\}$. Например, для соответствия, показанного на рисунке 1, сужение на $Z = \{x_1\}$ имеет вид $\Phi|_{\{x_1\}} = \{(x_1, y_1)\}$.

Пусть заданы соответствия $\Phi: \ X \to Y$ и $\Psi: \ Y \to Z$. Композицией этих соответствий $\Theta = \Psi \circ \Phi$ называется соответствие $\Theta: \ X \to Z$, задаваемое соотношением

$$\Theta = \{(x, z) \in X \times Z | \ \exists y \in Y: \ (x, y) \in \Phi, \ (y, z) \in \Psi\}.$$

Далее приведены свойства соответствий, доказательство которых предоставляется читателю в качестве упражнения. При описании этих свойств используются следующие обозначения: $\Phi: \ X \to Y$, $\Psi: \ Y \to Z$, $\Theta: \ Z \to U$ – соответствия между указанными множествами, $\{A_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ – произвольное семейство подмножеств X, проиндексированное элементами множества Λ. Для произвольного множества Z используется обозначение $I_Z = \{(z, z), \ z \in Z\}$ – "главная диагональ"декартова произведения $Z \times Z$.

1. Монотонность по включению
$$A \subseteq B \subseteq X \implies \Phi(A) \subseteq \Phi(B).$$
2. Образ объединения и пересечения
$$\Phi\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi\left(A_\lambda\right), \quad \Phi\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Phi\left(A_\lambda\right).$$
3. Выражение образа множества через образы его элементов
$$\Phi(A) = \bigcup_{x\in A} \Phi(x), \quad A \subseteq X.$$
4. Действие композиции соответствий на множество
$$(\Psi \circ \Phi)(A) = \Psi(\Phi(A)).$$
5. Ассоциативность операции композиции соответствий
$$\Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$
6. Области определения и значений взаимно обратных соответствий
$$\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{R}(\Phi^{-1}), \quad \mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{D}(\Phi^{-1}).$$
7. Композиция прямого и обратного соответствий
$$\Phi^{-1} \circ \Phi \supseteq I_X.$$
8. Представление композиции
$$\Theta \circ \Psi \circ \Phi = \bigcup_{(y,z)\in\Psi} \Big(\Phi^{-1}(y) \times \Theta(z)\Big).$$

2 Поляра

Пусть $\Phi :\ X \to Y$ – некоторое соответствие.

Определение 2.1 *Полярой соответствия* Φ *называется отображение* $\pi_\Phi :\ 2^X \to 2^Y$, *ставящее в соответствие каждому множеству* $A \subseteq X$ *множество*
$$\pi_\Phi(A) = \{y \in Y |\ \Phi^{-1}(y) \supseteq A\}.$$

Если соответствие Φ фиксировано, то удобно писать π вместо π_Φ; кроме того, для одноэлементных множеств $\{x\},\ x \in X$ будем использовать сокращенную форму записи $\pi(\{x\}) = \pi(x)$.

Поляра обратного соответствия Φ^{-1} называется обратной полярой Φ и обозначается $\pi^{-1} = \pi_\Phi^{-1} = \pi_{\Phi^{-1}}$.

Перечислим некоторые свойства поляры, доказательство которых предоставляется читателю.

1. Поляра одноточечного множества
$$\pi(x) = \Phi(x).$$

2. Выражение поляры множества через поляры элементов
$$\pi(A) = \bigcap_{x \in A} \pi(x), \quad A \subseteq X.$$

3. Поляра объединения множеств
$$\pi\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \pi\left(A_\lambda\right)$$

4. Монотонность поляры по включению
$$A \subseteq B \subseteq X \implies \pi(A) \supseteq \pi(B).$$

5. Связь прямой и обратной поляр
$$A \subseteq X,\ B \subseteq Y,\ A \times B \subseteq \Phi \Longrightarrow A \subseteq \pi^{-1}(B), \quad B \subseteq \pi(A).$$

6. Композиция прямой и обратной поляр
$$A \subseteq X,\ B \subseteq Y \implies A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A)), \quad B \subseteq \pi(\pi^{-1}(B)).$$

3 Теорема отделимости

Не всякое подмножество $B \subseteq Y$ может быть значением поляры π, равно как и не всякое подмножество $A \subseteq X$ может являться значением π^{-1}. В следующей теореме характеризуются множества, которые являются значениями π^{-1}. Ввиду симметрии понятий прямого и обратного соответствий эта теорема легко переформулируется и для прямой поляры π.

Теорема 3.1 *Пусть $A \subseteq X$ – фиксированное подмножество. Для того, чтобы существовало подмножество $B \subseteq Y$ такое, что $A = \pi^{-1}(B)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in X \setminus A = A^c$ существовал такой элемент $y = y_x \in Y$, что $\pi^{-1}(y_x) \supseteq A$ и $x \notin \pi^{-1}(y_x)$ (при этом $A = \pi^{-1}(\pi(A))$).*

Замечание 3.1 *Эта теорема в какой-то мере напоминает теоремы отделимости из выпуклого анализа, поскольку значение поляры π^{-1} в точке y_x "разделяет"точку x и множество A. Это обстоятельство и обусловило название пункта.*

Доказательство. **Достаточность**. Зададим множество B следующим образом:
$$B = \bigcup_{x \in A^c} \{y_x\},$$

и покажем, что $\pi^{-1}(B) = A$. Действительно, используя третье свойство поляры, получаем

$$\pi(B) = \pi\left(\bigcup_{x \in A^c} \{y_x\}\right) = \bigcap_{x \in A^c} \pi(y_x) \supseteq A,$$

поскольку по условию каждое из множеств $\pi(y_x),\ x \in A^c$ содержит A. Если же последнее пересечение в этой формуле шире A, то в нем найдется $x \notin A$, для которого, по условию теоремы, можно найти y_x такое, что $x \notin \pi^{-1}(y_x)$, что противоречит способу построения B. Таким образом, $\pi^{-1}(B)$ совпадает с A, и достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость. Пусть существует $B \subseteq Y$ такое, что $A = \pi^{-1}(B)$, или, по определению поляры,

$$A = \{x \in X |\ \Phi(x) \supseteq B\}.$$

Отсюда вытекает, что для любого $x \notin A$ имеет место $\Phi(x) \not\supseteq B$, то есть, найдется $y = y_x \in B$ такой, что $y_x \notin \Phi(x)$, что эквивалентно $x \notin \Phi^{-1}(y_x) = \pi^{-1}(y_x)$. Кроме того, ввиду монотонности поляры, $\pi^{-1}(y_x) \supseteq \pi^{-1}(B) = A$. Теорема доказана. $\diamond$

4 Компонента

Пусть $\Phi :\ X \to Y$ – соответствие из X в Y, а $\pi :\ 2^X \to 2^Y$ – его поляра. Как уже отмечалось, для произвольного множества $A \subseteq X$ выполняется включение

$$A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A)). \tag{1}$$

Ввиду монотонности поляр π, π^{-1} для композиции $\rho = \pi^{-1} \circ \pi$ имеем $\rho :\ 2^X \to 2^X$ и

$$A \subseteq B \subseteq X \implies \rho(A) \subseteq \rho(B). \tag{2}$$

Особый интерес представляют множества, для которых включение (1) обращается в равенство. Такие множества называются *компонентами* соответствия, они в некотором роде являются "неподвижными точками"отображения ρ.

Определение 4.1 *Множество $H \subseteq X$ называется компонентой Φ, если выполняется равенство $H = \pi^{-1}(\pi(H))$.*

По теореме 3.1 множество $H \subseteq X$ является компонентой в том и только в том случае, когда $H = \pi^{-1}(B)$ при некотором $B \subseteq Y$. Отсюда вытекает, что $\pi^{-1}(\pi(A))$ является наименьшей (по включению) компонентой, содержащей $A \subseteq X$. Обозначим эту наименьшую компоненту $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

Сформулируем несколько свойств компонент в виде предложений.

Предложение 4.1 *Пересечение произвольной совокупности компонент является компонентой.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{H_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ – совокупность компонент соответствия Φ. По свойству 3 из 2 имеем

$$H = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(\pi(H_\lambda)) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi(H_\lambda)\right),$$

так что, по теореме 3.1, H является компонентой. $\diamond$

Из предложения 4.1 вытекает, что можно говорить о наименьшей компоненте, как пересечении всех компонент соответствия Φ. Она, очевидно, совпадает с $\pi^{-1}(Y)$ и называется *центром* соответствия.

Предложение 4.2 *X является (наибольшей) компонентой Φ.*

Доказательство вытекает из соотношения $X = \pi^{-1}(\emptyset)$ и теоремы 3.1. $\diamond$

Если H является компонентой Φ, то $H' = \pi(H)$ будет, очевидно, компонентой Φ^{-1}; она называется *дополнением* H. Обозначив $\mathcal{K}_\Phi \subseteq 2^X$ совокупность всех компонент соответствия Φ, нетрудно заметить, что сужение π на $\mathcal{K}_\Phi$ является взаимнооднозначным отображением $\mathcal{K}_\Phi$ на $\mathcal{K}_{\Phi^{-1}}$, обратным к которому является сужение π^{-1} на $\mathcal{K}_{\Phi^{-1}}$.

Компонента $H \in \mathcal{K}_\Phi$ называется *главной*, если для некоторого элемента $x \in X$ справедливо $H = \overline{\{x\}}$, при этом $H = \pi^{-1}(\pi(x))$, и говорят, что компонента H порождена элементом x. Если максимальная компонента X является главной, то порождающий ее элемент называется *единицей*. Сопоставляя элементу $x \in X$ порожденную им главную компоненту $\pi^{-1}(\pi(x))$, получаем отображение из X в $\mathcal{K}_\Phi$, называемое *каноническим*.

5 Примеры: отношения

Напомним [2], что *отношением* R на множестве X называется любое подмножество $R \subseteq X \times X$ декартова произведения X на себя. Поэтому отношения являются частным случаем соответствий при совпадении областей отправления и прибытия: $Y = X$. Рассмотрим содержательный смысл введенных понятий на примере отношений.

Сначала укажем некоторые общие свойства соответствий, как отношений R на множестве X.

1. $R \subseteq X \times X$ симметрично тогда и только тогда, когда $R^{-1} = R$.

2. $R \subseteq X \times X$ транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subseteq R$.

3. $R \subseteq X \times X$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $R \supseteq I_X$.

4. $R \subseteq X \times X$ антисимметрично тогда и только тогда, когда $R^{-1} \cap R \subseteq I_X$.

5.1 Отношение эквивалентности

Пусть $(X, \sim)$ – множество с заданным на нем отношением эквивалентности, то есть, симметричным, рефлексивным, транзитивным отношением [2]. Для удобства наряду с символом $\sim$ будем использовать для этого отношения обозначение R. По свойству 1 из 5 обратное отношение R^{-1} совпадает с R, поэтому обратная поляра совпадает с прямой: $\pi = \pi^{-1}$. Значение поляры π на одноточечном множестве $\{x\}$ является классом эквивалентности $K(x)$, содержащим заданную точку. Если множество $A \subseteq X$ целиком содержится в некотором классе эквивалентности $C \in X/R$, то $\pi(A) = C$. Если же в A встречаются хотя бы две точки из различных классов эквивалентности, то $\pi(A) = \emptyset$. Таким образом, значениями поляры π для R могут служить только пустое множество и классы эквивалентности.

Классы эквивалентности $C \in X/R$ являются, очевидно, и компонентами R. Для тривиального отношения эквивалентности ($R = X \times X$, все элементы X эквивалентны друг другу) X является единственным классом эквивалентности, а также максимальной и минимальной (и, следовательно, единственной) компонентой R. Эта компонента является главной, а единицей может служить любой элемент $x \in X$. Для любого нетривиального отношения эквивалентности R минимальной компонентой (центром) является $\emptyset$, максимальной – X, а все остальные компоненты совпадают с классами эквивалентности, и являются главными; порождающим может служить любой элемент из соответствующего класса эквивалентности.

Понятие канонического отображения (см. [2]) из X в фактор-множество X/R совпадает в случае отношения эквивалентности с одноименным понятием из 4.

5.2 Отношение порядка

Пусть $(X, \leq)$ – упорядоченное множество, то есть, множество с заданным на нем отношением порядка [2]. Для $x, y \in X$ определим порядковые отрезки:

$$(\leftarrow, x] = \{z \in X |\ z \leq x\}, \quad [x, \rightarrow) = \{z \in X |\ x \leq z\}.$$

Ясно, что в этом случае

$$\pi(x) = \Phi(x) = [x, \rightarrow), \quad \pi^{-1}(x) = \Phi^{-1}(x) = (\leftarrow, x], \quad x \in X.$$

Для обычного порядка на вещественной прямой только такие отрезки (обозначаемые в этом случае $(-\infty, x]$ и $[x, \infty)$) и могут быть компонентами отношения порядка. В случае частичного порядка "возможны варианты разобраться в которых читателю предлагается самостоятельно (см. упражнение 6.5).

6 Упражнения

Упражнение 6.1 *Вывести формулу для обращения композиции соответствий, в которой* $(\Phi \circ \Psi)^{-1}$ *выражается через* Φ^{-1} *и* Ψ^{-1} *с помощью операции композиции.*

Упражнение 6.2 *Доказать свойства соответствий 1–8 из 1.*

Упражнение 6.3 *Доказать свойства поляры 1–6 из 2.*

Упражнение 6.4 *Доказать свойства отношений 1–4 из 5*

Упражнение 6.5 *Пусть* $X = \mathbf{R}^2$, *элементы* X *представляются парами вида* $x = (x_1, x_2)$, *а частичный порядок на* X *задан соотношениями*

$$x \leq y \iff x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2.$$

Описать совокупность всех компонент этого порядка.

Список литературы

[1] Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. (1978) *Упорядоченные векторные пространства.* Новосибирск: Наука, 368 с.

[2] Новоселов А.А. (2001) Отношения. *Лекция для студентов КГУ.* Красноярск, 12 с., http://risktheory.novosyolov.com/lectures.htm#Rel