Алгебры и функции множества

А.А.Новоселов*

Лекция для студентов Института математики СФУ

Аннотация

В лекции рассматриваются понятия алгебры и σ-алгебры, используемые в общей теории меры, и, в частности, в теории вероятностей и ее ветви – теории риска. Вводятся понятия алгебраических оболочек и рассматриваются проблемы их взаимосвязи. Рассматриваются функции множества на алгебрах и σ-алгебрах, а также конструкции, приводящие к совокупности вероятностных мер.

1 Алгебры

Пусть задано произвольное множество $\mathcal{X}$, рассмотрим любую совокупность его подмножеств $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathcal{X}}$.

Определение 1 *Совокупность множеств $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathcal{X}}$ называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства (аксиомы):*
A1. $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$;
A2. $A \in \mathcal{A}$ *влечет* $A^c \in \mathcal{A}$;
A3. $A, B \in \mathcal{A}$ *влечет* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Нетрудно заметить, что из аксиом алгебры множеств вытекают также следующие свойства алгебры множеств $\mathcal{A}$:

Следствие 1 *Имеют место следующие свойства алгебры множеств $\mathcal{A}$:*
C1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
C2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *влечет* $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$;
C3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *влечет* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Однако, объединение или пересечение счетной совокупности элементов алгебры $\mathcal{A}$ уже может и не принадлежать $\mathcal{A}$ (см. упражнение 1, а также следующий пример).

Пример 1 *В качестве основного множества выберем совокупность натуральных чисел $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots\}$, и рассмотрим в нем класс множеств $\mathcal{A}$, состоящий их всех множеств A, обладающих таким свойством: либо A, либо A^c представляют собой*

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.com

конечное множество. В частности, все моноплеты $\{i\}$, $i \in \mathcal{X}$ являются элементами этой совокупности. Ясно, что $\mathcal{A}$ образует алгебру множеств (проверить!). Однако, множество всех нечетных чисел $\mathcal{N}$, очевидно, не лежит в $\mathcal{A}$, и в то же время, является счетным объединением моноплетов:

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k+1\}.$$

В этой связи имеет содержательный смысл следующее понятие:

Определение 2 *Система $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathcal{X}$ называется σ-алгеброй, если выполнены аксиомы* A1, A2 *определения 1, и, кроме того, справедлива аксиома*
A3a. *$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ влечет $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.*

Ясно, что всякая σ-алгебра является также и алгеброй, а обратное, как вытекает из предыдущего примера и результата упражнения 1, неверно. Кроме того, из аксиом прямо вытекает

Следствие 2 *Имеет место*
C4. *$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ влечет $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.*

2 Оболочки

Пусть $\mathcal{X}$ - произвольное множество. Обозначим $\mathbf{A}_{\mathcal{X}}$ совокупность всех алгебр подмножеств $\mathcal{X}$, а $\mathbf{A}^{\sigma}_{\mathcal{X}}$ — совокупность всех σ-алгебр подмножеств $\mathcal{X}$. Можно показать, см. упражнение 2, что $\mathbf{A}^{\sigma}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathbf{A}_{\mathcal{X}}$.

Предложение 1 *Пересечение произвольной совокупности $\mathcal{Z}$ алгебр (σ-алгебр)*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{Z}} \mathcal{A}$$

является (σ)-алгеброй.

Доказательство см. упражнение 3. $\diamond$
Установленное предложение позволяет ввести понятие *оболочки*.

Определение 3 Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная совокупность подмножеств $\mathcal{X}$. *Алгебраической оболочкой* называется наименьшая по включению алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, содержащая $\mathcal{B}$:

$$\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbf{A}_{\mathcal{X}};\, \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}} \mathcal{A};$$

σ-алгебраической оболочкой называется наименьшая по включению σ-алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, содержащая $\mathcal{B}$:

$$\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbf{A}^{\sigma}_{\mathcal{X}};\, \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}} \mathcal{A}.$$

Одна из этих оболочек заведомо не шире другой, какая именно, предлагается выяснить в упражнении 4.

Пример 2 В теории меры и, в частности, теории вероятностей часто используется *борелевская* σ-алгебра подмножеств $\mathbf{R}$. Она строится, как σ-алгебраическая оболочка совокупности подмножеств $\mathcal{B}$, в которую входят всевозможные открытые, замкнутые и полуоткрытые интервалы вещественной оси $\mathbf{R}$.

3 Функции множества

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное множество, а $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра или σ-алгебра его подмножеств. Пара $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ называется *измеримым пространством*, а функция $f : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ называется *функцией множества*. Функция множества f называется *аддитивной*, если для произвольных $A, B \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$. Функция f называется супераддитивной (субаддитивной) выполняются неравенства $f(A \cup B) + f(A \cap B) \geq f(A) + f(B)$ $(f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B))$ соответственно.

Обозначим $\mathcal{F}$ совокупность всевозможных функций множества, заданных на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Эта совокупность образует линейное пространство относительно естественных (поточечных) операций сложения функций и умножения функции на число. Далее, обозначим $\mathcal{F}_0$ совокупность функций $f \in \mathcal{F}$, для которых выполняется условие $f(\emptyset) = 0$. Эта совокупность образует в $\mathcal{F}$ линейное подпространство коразмерности 1. Аддитивные, супераддитивные и субаддитивные функции в $\mathcal{F}_0$ задаются для непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{A}$ соотношениями $f(A + B) = f(A) + f(B)$, $f(A + B) \geq f(A) + f(B)$ и $f(A + B) \leq f(A) + f(B)$, соответственно. Если $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй, то вводится также понятие *σ-аддитивной* функции множества; так называется функция $f \in \mathcal{F}_0$, обладающая свойством

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \implies f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Обозначим $\mathcal{F}_0^a$ совокупность σ-аддитивных функций множества из $\mathcal{F}_0$. Нетрудно проверить, Что $\mathcal{F}_0^a$ является линейным подпространством в $\mathcal{F}$, см. упражнение 5. Функция множества $f \in \mathcal{F}_0^a$ называется *мерой*, если $f(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{A}$. Совокупность всех мер $\mathcal{M}$ образует в $\mathcal{F}_0^a$ конус, см. упражнение 6. Функция $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяющая условию $f(\mathcal{X}) = 1$, называется *вероятностной мерой*. Совокупность всех вероятностных мер $\mathcal{P}$ можно назвать стандартным симплексом, см. упражнение

Пример 3 Пусть множество $\mathcal{X}$ конечно: $|\mathcal{X}| = n$. При этом (см. упражнение 2) понятия алгебры и σ-алгебры совпадают. Ввиду аддитивности для задания произвольной функции $f \in \mathcal{F}_0^a$ достаточно задать ее значения в одноточечных множествах $\{x\}$ для всех $x \in \mathcal{X}$. Остальные значения f вычисляются по формуле

$$f(A) = \sum_{x \in A} f(\{x\}).$$

Поэтому $\mathcal{F}_0^a$ в данном случае изоморфно $\mathbf{R}^n$. Конус $\mathcal{M}$ при таком изоморфизме соответствует неотрицательному октанту $\mathbf{R}^n$, а совокупность вероятностных мер $\mathcal{P}$ — стандартному симплексу $\mathbf{R}^n$, то есть, множеству точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$x_1 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ \ x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

4 Упражнения

Упражнение 1 Привести пример алгебры множеств $\mathcal{A}$, в которой объединение (пересечение) некоторой счетной совокупности элементов $\mathcal{A}$ не принадлежит $\mathcal{A}$.

Упражнение 2 Докажите включение $\mathbf{A}^{\sigma}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathbf{A}_{\mathcal{X}}$. При каком условии включение является строгим?

Упражнение 3 Доказать предложение 1 последовательно: для двухэлементной, конечной, счетной, произвольной совокупности (σ)-алгебр $\mathcal{Z}$.

Упражнение 4 Пусть $\mathcal{B}$ — произвольный набор подмножеств $\mathcal{X}$. Какая из алгебраических оболочек всегда не шире другой?

Упражнение 5 Доказать, что $\mathcal{F}^a_0$ является линейным подпространством $\mathcal{F}$.

Упражнение 6 Доказать, что $\mathcal{M}$ является конусом в $\mathcal{F}^a_0$.

Упражнение 7 Изобразите $\mathcal{F}^a_0$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ в случае $|\mathcal{X}| = n$ при $n = 2$ и $n = 3$, см. пример 3.

Список литературы

[1] В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **1,2**, М.: Мир, 1984.

[2] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд-во иностр. литер.

[3] Партасарати К. (1983) *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* М.: Мир - 336 с.